Biblioteca
Universității Iași

II B-4137

SILVIA L. CREANGĂ
Doctor în Matematici
Profesoară la Liceul de fete „Oltea Doamna", Iași

PROBLEME DE MATEMATICI ELEMENTARE

PROPUSE IN INTERVALUL 1926—1935

ORDONATE PE CLASE LICEALE, DUPĂ PROGRAMA ANALITICĂ DIN 1934

EDITURA „CARTEA ROMÂNEASCĂ", BUCUREȘTI

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

SILVIA L. CREANGĂ
Doctor în Matematici
Profesoară la Liceul de fete „Oltea Doamna", Iași

8 JUL. 1935
Biblioteca Universității Iași
ale 10805

PROBLEME DE MATEMATICI ELEMENTARE

PROPUSE IN INTERVALUL 1926—1935

ORDONATE PE CLASE LICEALE, DUPĂ PROGRAMA ANALITICĂ DIN 1934

EDITURA „CARTEA ROMÂNEASCĂ", BUCUREȘTI
5666 – 935

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CLASA I-a.

Probleme rezolvate.

1. *Un negustor cumpără trei calităţi de vin: I, 324 litri cu 36,25 lei litrul; II-lea, 296 litri, plătind în total cu 1368,55 lei mai puţin ca prima dată; a III-a oară, 276 litri, plătind pe fiecare 5 litri din această calitate cât ar fi plătit pe 7 litri din prima calitate. Le amestecă. Cu cât trebue să vândă litrul de amestec ca să câştige în total 7327,55 lei.*

Se află pe rând:

1° Preţul cumpărării vinului din I-a calitate.
2° Preţul cumpărării vinului din calitatea a II-a.
3° Preţul a 7 litri din prima calitate.
4° Preţul unui litru din calitatea a III-a.
5° Preţul cumpărării vinului de calitatea a III-a.
6° Preţul vânzării întregei cantităţi de amestec.
7° Numărul litrilor de amestec.
Preţul vânzării unui litru de amestec.

$36{,}25 \times 324 = 11745$ lei.

lei lei lei
$11745 - 1368{,}55 = 10376{,}45$

lei
$36{,}25 \times 7 = 253{,}75$ lei.

lei
$253{,}75 : 5 = 50{,}75$ lei

lei
$50{,}75 \times 276 = 14007$ lei.

36,25 ×	50,75 ×
3 24	2 76
145 00	304 50
725 0	3552 5
10875	10150
11745,00	14007,00

lei lei lei lei
11745 + 10376,45 + 14007 + 7327,55 = 43456,00 lei.

1 1 1 1
324 + 296 + 276 = 896

lei
43456 : 896 = 48,50 lei.

43456 : 896 = 48,50
7616
4480
===0

Răspuns: *Va trebui să vândă litrul de amestec cu 48,50 lei.*

*

Probleme de rezolvat.

1. Prețul unui metru de stofă este 458,25 lei; câți metri se pot cumpăra cu 26439 lei?

2. Intr'un vas încap 3,78 litri de apă. Câte vase de acestea se pot umplea dintr'un alt vas, ce are volumul de 2,328439m³?

3°. Cu 2130 lei se cumpără 378kg făină de porumb. Cât costă kilogramul?

4. Cu 325473 lei se cumpără 456m² de pământ. Cât costă arul?

5. Se împarte suma de 137423 lei la 289 săraci. Cât se va da la fiecare?

6. Un lucrător primește pe 349 zile de lucru 25324 lei. Cu cât i s'a plătit ziua de lucru.

7. Un tren face 48,527km. pe oră; în cât timp va parcurge distanța de 23,450km.

8. Un negustor cumpără 354m. de stofă cu 687 lei metrul, din care vinde întâi 87m. cu 762 lei metrul, apoi 124m. cu 823 lei metrul. Cu cât trebue să vândă un metru din cei rămași ca să câștige la toți metrii cumpărați 36688 lei.

Răspuns: *780 lei.*

9. Un negustor cumpără 478 litri de vin cu 27 lei litrul; 396 litri cu 36 lei litrul; 278 litri, plătind în total cu 5082 lei mai puțin decât prima dată. El le amestecă. Cu cât trebue să vândă litrul de amestec ca să câștige 3984 lei.

Răspuns: 35 lei.

10. Se amestecă cafea din două calități: 36kg. din prima calitate a 78,60 lei kg cu 49kg din calitatea a 2-a, care este astfel că 3kg. din această calitate valorează cât 4kg din cealaltă calitate. Cu cât trebue să vândă kilogramul de amestec ca să câștige în total 727,20 lei.

11. Un negustor cumpără 64,80m. de postav cu 976 lei metrul și 81m. căptușeală cu 350 lei metrul, pentru paltoane, întrebuințând câte 2,40 m. de stofă pentru fiecare palton și cheltuind câte 1500 lei pentru lucrul unui palton. Cu cât trebue să vândă paltonul ca să câștige în total cu 95234,60 lei mai puțin decât costul paltoanelor.

12. Un negustor cumpără 69,60m. de postav cu 897 lei metrul și 87m. căptușeală cu 340 lei metrul, pentru paltoane, întrebuințând câte 2,40m. de postav pentru fiecare palton și cheltuind câte 1500 lei pentru lucrul unui platon. Cu cât trebue să vândă paltonul ca să câștige în total cu 97816,20 lei mai puțin decât costul paltoanelor.

13. Aria unui dreptunghiu este de 324,2730dam^2, iar lungimea de 783,2m. Să se afle lățimea.

14. Aria unui trapez este de 28,3546m^2, înălțimea de 7,35m, iar baza mare de 5,78m. Să se afle baza mică.

15. Să se afle raza pământului.

16. O grădină are forma unui dreptunghiu, a cărui lungime este de 3 ori cât lățimea și perimetrul este de

68m. Din mijlocul fiecărei laturi pleacă perpendicular pe latură către interior câte o cărare lată de 24 cm, de aceiaş lungime, care mărgineşte de o parte şi de alta câte un strat de forma unui triunghiu dreptunghiu, al cărui al treilea vârf este vârful vecin al dreptunghiului. Suprafaţa unuia din triunghiurile alăturate lăţimii este de 256,06 dm²; în mijlocul grădinei se află un bazin de apă circular cu circumferinţa de 14,13 m înconjurat de o cărare tot atât de lată ca celelalte. Locul dintre straturi, bazin şi cărări e semănat cu iarbă. Să se afle: 1°. Dimensiunile dreptunghiului; 2°. Lungimea cărării dreptunghiulare; 3°. Suprafaţa unui strat alăturat lungimii; 4°. Suprafaţa cărării care înconjură bazinul; 5°. Suprafaţă semănată cu iarbă.

17. Un loc are forma unui trapez cu baza mare de 3,864hm, baza mică de 28,86 dam şi înălţimea de 196,4 m. Locul este cultivat cu grâu afară de o parte ocupată de un lac circular cu circumferinţa de 132,665 m. Să se afle câţi hl produce un hectar dacă locul întreg produce 124,35hl.

18. Un loc are forma unui trapez cu baza mare de 3,673km, baza mică de 31,87 dam. şi înălţimea de 196,5 m. Locul este cultivat cu grâu afară de o parte ocupată de un lac circular cu circumferinţa de 63,585 m. Să se afle câţi hl se produce pe un hectar, dacă locul întreg produce 132,75 hl.

19. Un loc de forma unui cerc este înconjurat de 1900 pari, aşezaţi la distanţa măsurată pe cerc de 1,57 m. unul de altul. Pe acest loc se recoltează fân, fiecare ha producând 8400 kg de fân verde. Cu cât trebue să vândă kilogramul de fân uscat ca să încaseze în total 2856520,80 lei, ştiind că fânul pierde prin uscare 4% din greutatea sa.

20. Un loc de forma unui cerc este înconjurat de 2500 pari, aşezaţi la distanţa de 1,57 m. între ei, măsurată pe cerc. Pe acest loc se recoltează fân, fiecare ha. producând 8400 kg de fân verde. Cu cât trebue să vândă kg de fân uscat ca să încaseze 4945500 lei, ştiind că fânul pierde prin uscare 4% din greutatea sa.

21. Volumul unui paralelipiped dreptunghiu este de 63,432 m^3, înălţimea de 374 cm, iar lungimea bazei de 58,9dm. Să se afle lăţimea bazei.

22. S'a cumpărat grâul dintr'un hambar cu înălţimea de 3,25m perimetrul bazei de 19,78 m şi lungimea de 5,35m. pe preţ de 96000 lei vagonul, ştiind că 1hl de grâu cântăreşte 78,5 kg. Cu cât trebue să se vândă kilogramul ca să se câştige 24% din preţul cumpărării?

23. Câţi litri încap într'un bazin de forma unui paralelipiped dreptunghiu care are lăţimea de 4,62 m, suprafaţa bazei de 24,6708 m^2 şi înălţimea cât jumătatea lungimei? Câte căldări de 9,24 litri trebuesc pentru a umplea bazinul? Câţi litri rămân dacă se scufundă o bucată de fier de 327,6 kg ştiind că densitatea fierului este 7,8?

24. Câţi litri încap într'un bazin de forma unui paralelipiped dreptunghiu care are lăţimea de 3,78 m, suprafaţa bazii de 1746,34 dm^2 şi înălţimea cât jumătatea lungimei? Câte căldări de 79,2 dl trebuesc pentru a umplea bazinul? Câţi litri rămân dacă se scufundă o bucată de fier de 280,8kg ştiind că desitatea fierului este de 7,8?

25. Un bazin are forma unui paralelipiped dreptunghiu cu înălţimea de 2,50 m lungimea de trei ori cât lăţimea, iar perimetrul bazei de 3,456 dam. Să se afle câţi litri de apă încap în bazin. In cât timp va fi umplut bazinul de un robinet care dă 14,40dal de apă pe minut.

26. Un bazin are forma unui paralelipiped dreptunghiu cu înălțimea de 25 dm, lungimea de 3 ori cât lățimea iar perimetrul bazei de 32,24 m. Să se afle câți litri de apă încap în bazin. In cât timp va fi golit bazinul, dacă se scurg 13,50 dal. pe minut.

27. Un paralelipiped dreptunghiu are lungimea de 5,40m, lățimea de 2,40 m și suprafața laterală de 56,16 m². O piramidă are volumul său egal cu $\frac{4}{9}$ din volumul paralelipipedului și baza un triunghiu cu înălțimea de 1,20m și baza de 8,1 m. Să se afle înălțimea piramidei.

28. Un paralelipiped dreptunghiu are lungimea de 6,40m, lățimea de 280 cm și suprafața laterală de 6440 dm². O piramidă are volumul său egal cu $\frac{3}{5}$ din volumul paralelipipedului și baza un triunghiu cu înălțimea de 480cm. și baza de 56 dm. Să se afle înălțimea piramidei.

29. Un drug de fier de forma unui paralelipiped dreptunghiu cântărește 26,15652 kg. Să se afle: 1°. Volumul drugului, știind că densitatea fierului este 7,8; 2°. Lungimea drugului, dacă lungimea bazei este de 4,5cm iar lățimea bazei este $\frac{3}{5}$ din lungimea bazei.

30. Intr'un vas cilindric, care are circumferința bazei de 2,6376 metri sunt 830,844 litri de apă. Se introduce în vas un corp de forma unui paralelipiped dreptunghiu cu lungimea de 6,28 m, lățimea de 6,3 dm și înălțimea de 70 cm. Să se afle până la ce înățime se află apă în vas: 1° inainte de introducerea corpului; 2° după introducerea lui.

Biblioteca Universității Iași

CLASA A II-a.

ARITMETICĂ.

Probleme rezolvate.

1. *Fracțiunea* $\frac{4}{9}$ *dintr'un loc este semănată cu grâu,* $\frac{11}{42}$ *cu porumb,* $\frac{1}{4}$ *cu cartofi,* $\frac{13}{1260}$ *cu zarzavaturi. Să se afle: 1⁰. Ce fracție din loc a fost cultivată; 2⁰. Ce fracție a rămas necultivată; 3⁰. Ce suprafață avea locul, dacă partea necultivată era de 1470 m².*

$$1^0.\ \overbrace{\frac{4}{9}}^{140} + \overbrace{\frac{11}{42}}^{30} + \overbrace{\frac{1}{4}}^{315} + \frac{13}{1260} = \frac{560 + 330 + 315 + 13}{1260} =$$

$$= \overbrace{\frac{1218}{1260}}^{6} = \overbrace{\frac{203}{210}}^{7} = \frac{29}{30}$$

$126 = 2 \times 63 = 2 \times 3^2 \times 7$

$9 = 3^2$

$42 = 2 \times 3 \times 7$

$1260 = 126 \times 10 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$C.m.m.m.c. = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$

$1260 : 42 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 : 2 \times 3 \times 7 = 2 \times 3 \times 5 = 30$

$$2^0.\ 1 - \frac{29}{30} = \frac{1}{30}$$

BCU IAȘI - UNIVERSITY LIBRARY

3°. $\frac{1}{30}$ valorează 1470 ari

$\frac{30}{30}$ va valora de 30 ori mai mult: $1470 \times 30 =$ $= 44100$ ari $= 441$ ha.

*

2. *Un proprietar vinde întâi fracţiunea* $\frac{47}{324}$ *din moşia sa; apoi* $\frac{62}{567}$ *din moşie; a treia oară vinde o parte de 5 ori mai mare decât diferenţa dintre cele dintâi două părţi; a patra oară vinde o parte de 6 ori mai mică de cât partea vândută a treia oară. Restul îl împarte în părţi egale cu fracţiunea* $\frac{340}{4536}$ *din moşie, rămânând astfel o parcelă mai mică ca celelalte. Să se afle: 1°. Câţi ari avea moşia, dacă parcela mică avea 285 ari; 2°. Ce suprafaţă avea fiecare din bucăţile vândute.*

$$1^0.\ \frac{\overset{7}{\overbrace{47}}}{324} - \frac{\overset{4}{\overbrace{62}}}{567} = \frac{329 - 248}{2268} = \frac{\overset{9}{\overbrace{81}}}{2268} = \frac{\overset{9}{\overbrace{9}}}{252} = \frac{1}{28}$$

$324 = 2^2 \times 3^4$

$567 = 3^4 \times 7$

$$\begin{array}{r|l} 324 & 2^2 \\ 81 & 3^4 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 567 & 3^2 \\ 63 & 3^2 \times 7 \\ 1 & \end{array}$$

$C.m.m.m.c. = 2^2 \times 3^4 \times 7 = 567 \times 4 = 2268.$

III. $\frac{1}{28} \times 5 = \frac{5}{28}$

IV. $\frac{5}{28} : 6 = \frac{5}{28 \times 6} = \frac{5}{168}$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\overbrace{47}^{14}}{324}+\frac{\overbrace{62}^{8}}{567}+\frac{\overbrace{5}^{162}}{28}+\frac{\overbrace{5}^{27}}{168}=\frac{\overbrace{658}+\overbrace{496}+\overbrace{810}+\overbrace{135}}{4536}=\frac{2099}{4536}$$

$324 = 2^2 \times 3^4$

$567 = 3^4 \times 7$

$28 = 2^2 \times 7$

$168 = 2^3 \times 3 \times 7$

$C.m.m.m.c. = 2^3 \times 3^4 \times 7 = 2268 \times 2 = 4536.$

$168 \mid 2^3$
$21 \mid 3 \times 7$
$1 \mid$

$47 \times$
14
188
47
658

$$1-\frac{2099}{4536}=\frac{4536-2099}{4536}=\frac{2437}{4536}$$

$$\frac{2437}{4536}:\frac{340}{4536}=\frac{2437\times4536}{4536\times340}=\frac{2437}{340}=7\frac{57}{340}$$

$2437 : 340 = 7$
$=57$

Calculul parcelei mici :

$$\frac{340}{4536}\times 7=\frac{340\times7}{4536}=\frac{2380}{4536}$$

$$\frac{2437}{4536}-\frac{2380}{4536}=\frac{57}{4536}$$

sau prin altă metodă : In $\frac{2437}{4536}$ s'a cuprins fracțiunea $\frac{340}{4536}$ de 7 ori și încă fracțiunea $\frac{57}{340}$ din ea $\left(\frac{340}{4536}\right)$ adică :

$$\frac{\frac{340}{4536}}{\frac{340}{340}}\times 57=\frac{340\times57}{4536\times340}=\frac{57}{4536}$$

Fracțiunea $\frac{57}{4536}$ valorează 285 ari

Intregul $\frac{4536}{4536}$ cât va valora? x

$\frac{57}{4536}$ . . . . . 285 ari

$\frac{1}{4536}$ . . . . . $\frac{285}{57}$ ari

$\frac{4536}{4536}$ . . . . . $\frac{285 \times 4536}{57}$ ari

$$x = \frac{\overset{57}{\smile}}{\frac{285 \times 4536}{57}} = 5 \times 4536 = 22680 \text{ ari}$$

2^0. I. $\frac{\overset{9}{\smile}}{\frac{22680}{324}} \times 47 = \frac{\overset{9}{\smile}}{\frac{2520 \times 47}{36}} = \frac{\overset{4}{\smile}}{\frac{280 \times 47}{4}} = 70 \times 47 =$

$= 3290$ ari.

II. $\frac{\overset{9}{\smile}}{\frac{22680}{567}} \times 62 = \frac{\overset{9}{\smile}}{\frac{2520 \times 62}{63}} = \frac{\overset{7}{\smile}}{\frac{280 \times 62}{7}} = 40 \times 62 =$

$= 2480$ ari.

III. $\frac{\overset{7}{\smile}}{\frac{22680}{28}} \times 5 = \frac{\overset{4}{\smile}}{\frac{3240 \times 5}{4}} = 810 \times 5 = 4050$ ari

IV. $\frac{\overset{6}{\smile}}{\frac{22680}{168}} \times 5 = \frac{\overset{7}{\smile}}{\frac{3780 \times 5}{28}} = \frac{\overset{4}{\smile}}{\frac{540 \times 5}{4}} = 135 \times 5 =$

$= 675$ ari

V. $\frac{\overset{2268}{\smile}}{\frac{22680}{4536}} \times 340 = \frac{\overset{2}{\smile}}{\frac{10 \times 340}{2}} = 340 \times 5 = 1700$ ari.

$1700 \times 7 = 11900$ ari.

Moşia avea 22680 ari; iar părţile vândute: 3290 ari, 2480 ari, 4050 ari, 675 ari, 11900 ari.

Verificare: Aflu parcela mică rămasă:

$$22680 - (3290 + 2480 + 4050 + 675 + 11900) = 22680 - 22395 = 285 \text{ ari.}$$

3. *Un călător face un drum în 6 zile. In prima zi parcurge fracţiunea* $\frac{73}{432}$ *din drum; a doua zi face mai puţin decât în prima zi cu fracţiunea* $\frac{7}{2700}$ *din drum; a treia zi face de 2 ori cât făcuse în ziua întâi; a patra zi face* $\frac{1}{5}$ *din drumul făcut în cele 2 zile; a cincea zi face fracţiunea* $\frac{5}{72}$ *din drumul făcut a patra zi; iar a şasea zi isprăveşte drumul, făcând 19726 m.*

Să se afle: 1⁰. Ce fracţiune din drumul total a făcut în fiecare zi; 2⁰. Câţi kilometri avea drumul; 3⁰. Câţi km. a făcut în fiecare zi; 4⁰. In câte zile ar fi făcut drumul, dacă făcea zilnic $10\frac{4}{5}$ *km.*

1⁰. I. $\frac{73}{432}$

$$\begin{array}{r|l} 432 & 2^2 \\ 108 & 2^2 \\ 27 & 3^3 \\ 1 & \end{array}$$

II. $\frac{\overset{25}{73}}{432} - \frac{\overset{4}{7}}{2700} = \frac{1825-28}{10800} = \frac{\overset{3}{1797}}{10800} = \frac{599}{3600}$

$432 = 2^4 \times 3^3$

$2700 = 27 \times 100 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$

C.m.m.m.c. $= 2^4 \times 3^3 \times 5^2 = 2700 \times 4 = 10800.$

$$\begin{array}{r} 73 \times \\ 25 \\ \hline 365 \\ 146 \\ \hline 1825 \end{array}$$

III. $\frac{73}{432} \times 2 = \frac{73}{216}$

IV. $$\frac{\overset{25}{\frac{73}{432}}+\overset{3}{\frac{599}{3600}}+\overset{50}{\frac{73}{216}}}{5}=\frac{\frac{1825+1797+3650}{10800}}{5}=$$

$$=\frac{\overset{9}{7272}}{10800\times5}=\frac{\overset{8}{808}}{1200\times5}=\frac{101}{150\times5}=\frac{101}{750}$$

$432=2^4\times3^3$

$216=2^3\times3^3$

$3600=2^4\times3^2\times5^2$

$C.m.m.m.c.=2^4\times3^3\times5^2=10800.$

V. Ca să aflu cât valorează fracțiunea $\frac{5}{72}$ din fracțiunea $\frac{101}{750}$, aflu mai întâiu a șaptezecișidoua parte din $\frac{101}{750}$, împărțind pe $\frac{101}{750}$ prin 72 și apoi iau această parte de 5 ori:

$$\frac{\frac{101}{750}}{72}\times5=\frac{101\times\overset{5}{5}}{750\times72}=\frac{101}{150\times72}=\frac{101}{10800}$$

$$\begin{array}{r}72\times\\150\\\hline360\\72\\\hline10800\end{array}$$

VI. $$1-\left(\frac{73}{432}+\frac{599}{3600}+\frac{73}{216}+\frac{101}{750}+\frac{101}{10800}\right)=$$

$$1-\left(\frac{101}{150}+\frac{101}{750}+\frac{101}{10800}\right)=1-101\times\left(\overset{360}{\frac{1}{150}}+\right.$$

$$\left.+\overset{72}{\frac{1}{750}}+\overset{5}{\frac{1}{10800}}\right)=1-101\times\frac{360+72+5}{54000}=$$

$$=1-\frac{101\times437}{54000}.$$

$150 = 2 \times 3 \times 5^2$

$750 = 2 \times 3 \times 5^3$

$10800 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2$

$C.m.m.m.c. = 10800 \times 5 = 54000$

$$\begin{array}{r} 437 \times \\ 101 \\ \hline 437 \\ 437 \\ \hline 44137 \end{array}$$

VI. $1 - \dfrac{44137}{54000} = \dfrac{9863}{54000}$.

2^0. $\dfrac{9863}{54000}$ valorează 19726 m

$\dfrac{54000}{54000}$ cât va valora? x

$$\frac{9863}{54000} \quad \ldots\ldots \quad 19726$$

$$\frac{1}{54000} \quad \ldots\ldots \quad \frac{19726}{9863}$$

$$\frac{54000}{54000} \quad \ldots\ldots \quad \frac{19726 \times 54000}{9863}$$

$$x = \frac{\overset{9863}{\frown}}{\frac{19726 \times 54000}{9863}} = 2 \times 54000 = 108000 \text{ m} = 108 \text{ km}.$$

3^0. I. $\dfrac{\overset{9}{\frown}}{\frac{108}{432}} \times 73 = \dfrac{\overset{12}{\frown}}{\frac{12 \times 73}{48}} = \dfrac{73}{4} = 18{,}25$ km.

II. $\dfrac{\overset{9}{\frown}}{\frac{108}{3600}} \times 599 = \dfrac{\overset{4}{\frown}}{\frac{12 \times 599}{400}} = \dfrac{3 \times 599}{100} = 17{,}97$ km.

III. $\dfrac{\overset{9}{\frown}}{\frac{108}{216}} \times 73 = \dfrac{\overset{12}{\frown}}{\frac{12 \times 73}{24}} = \dfrac{73}{2} = 36{,}5$ km.

BCU "MIHAIL KOGĂLNICEANU" UNIVERSITY LIBRARY

IV. $\frac{\overset{6}{\smile}}{\frac{108}{750}} \times 101 = \frac{\overset{\times 8}{\smile}}{\frac{18 \times 101}{125}} =$

$$= \frac{144 \times 101}{1000} = 14{,}544 \text{ km.}$$

$$\begin{array}{r} 144 \times \\ 101 \\ \hline 144 \\ \hline 14544 \end{array}$$

V. $\frac{108 \overset{108}{\smile}}{10800} \times 101 = \frac{101}{100} = 1{,}01$ km.

VI. 19,726 km.

Verificare: $\dot{18},250 + \dot{17},970 + \dot{36},500 + \dot{14},544 + \dot{1},010 + \dot{19},726 = 108{,}00$ km.

4°. $108 : 10\frac{4}{5} = 108 : \frac{54}{5} = \frac{\overset{54}{\smile}}{\frac{108 \times 5}{54}} = 2 \times 5 = 10$ zile.

*

4. Un robinet ar umplea în 5 ore fracțiunea $\frac{230}{351}$ *dintr'un bazin; însă, după ce curge* $2\frac{1}{6}$ *ore, se deschide încă un robinet, care ar umplea singur bazinul întreg în* $7\frac{4}{5}$ *ore.*

Să se afle: 1°. Câte ore vor trece dela deschiderea celui de al doilea robinet, până se va umplea bazinul, dacă în acest timp curg amândouă robinetele; 2°. Câți litri încap în bazin dacă amândouă robinetele dau împreună 700 litri în 2 ore.

1°. $\frac{230}{531} : 5 = \frac{\overset{5}{\smile}}{\frac{230}{351 \times 5}} = \frac{46}{351}$ fracțiunea din bazin umplută pe oră de primul robinet.

$$\frac{46}{351} \times 2\frac{1}{6} = \frac{46}{351} \times \frac{13}{6} = \frac{\overset{2}{\frown}\quad \overset{13}{\frown}}{46 \times 13} = \frac{23}{27 \times 3} = \frac{23}{81},$$

fracțiunea plină cu apă în $2\frac{1}{6}$ ore.

$1 - \frac{23}{81} = \frac{58}{81}$ partea rămasă goală.

$1 : 7\frac{4}{5} = 1 : \frac{39}{5} = \frac{5}{39}$ partea umplută pe oră de al doilea robinet.

$$\frac{46}{351} + \overset{9}{\frown}\frac{5}{39} = \frac{46 + 45}{351} = \overset{13}{\frown}\frac{91}{351} = \frac{7}{27}$$ partea dată pe oră de amândouă robinetele.

$351 = 3^3 \times 13$
$39 = 3 \times 13$
$C.m.m.m.c. = 3^3 \times 13 = 351$

351	3^2
39	3×13
1	

$$\frac{58}{81} : \frac{7}{27} = \frac{58 \times \overset{9}{\frown}27}{81 \times 7} = \frac{58 \times \overset{3}{\frown}3}{9 \times 7} = \frac{58}{21} = 2\frac{16}{21} \text{ ore}$$

$$\frac{16}{21} \text{ ore} = \frac{60}{21} \times 16 \text{ minute} = \frac{\overset{3}{\frown}\quad}{60 \times 16} = \frac{20 \times 16}{7} = \frac{320}{7} =$$

$= 45\frac{5}{7}$ minute.

$\frac{5}{7}$ minute $= \frac{60}{7} \times 5$ sec. $= \frac{300}{7} = 42\frac{6}{7}$ sec.

Partea rămasă goală va fi umplută de amândouă robinetele în $2^{ore}\ 45^{m}\ 42^{sec}\ \frac{6}{7}$

$2^0. \frac{7}{27} \times 2 = \frac{14}{27}$

$$\frac{14}{27} \ldots\ldots 700 \text{ l.}$$

$$\frac{27}{27} \ldots\ldots x$$

$$\frac{14}{27} \ldots\ldots 700$$

$$\frac{1}{27} \ldots\ldots \frac{700}{14}$$

$$\frac{27}{27} \ldots\ldots \frac{700 \times 27}{14}$$

$$x = \frac{\overset{7}{\cancel{700}} \times 27}{14} = \frac{100 \times 27}{2} = \frac{2700}{2} = 1350 \text{ litri}$$

Probleme de rezolvat.

1. Să se cerceteze care din numerele următoare sunt prime:

529, 613, 533, 539, 623, 197, 361, 257, 401.

2. Să se descompună în factori primi numerele: 72, 54, 36, 1000, 6300, 1008, 316200, 1512000, 396000, 18900, 864000, 762300, 2115, 816, 1025, 366500, 6292000, 113400, 709800, 3315000.

3. Să se cerceteze dacă împărțirile următoare se fac exact și în cazul când se fac exact, să se găsiască câturile cu ajutorul divizorilor.

a) 546 : 42; *b*) 2800 : 154; *c*) 84000 : 175;
d) 12096 : 144; *e*) 277200 : 198; *f*) 129360 : 147.

4. Să se găsească *C.m.m.d.c.*, *C.m.m.m.c.* și câtul dintre ele pentru numerele:

a) 144, 180, 288; *b*) 1125, 1500, 1875, 2625; *c*) 192, 384, și 480.

55. Să se găsească *C.m.m.d.c.* al numerelor următoare, precum și câturile dintre ele și *C.m.m.d.c.* al lor:
a) 330, 792, 4500, 4455; *b*) 6468, 4620, 3675.

6. Să se găsească câturile dintre *C.m.m.m.c.* al numerelor următoare și fiecare din ele:
a) 630, 1575, 945; *b*) 126000, 25200, 7560; *c*) 2310, 1848, 4158, 3234.

7. Să se simplifice fracțiile:

$$\frac{1386}{3654}, \frac{1350}{2025}, \frac{3360}{6240}, \frac{50400}{79200}, \frac{6750}{15750}, \frac{12150}{27000}.$$

8. Să se simplifice cu ajutorul *C.m.m.d.c.* al termenilor, fracțiile:

$$\frac{90720}{136080}, \frac{162000}{226800}, \frac{87120}{217800}.$$

9. Să se aranjeze în ordine de mărime crescătoare fracțiile:

a) $\frac{5}{36}, \frac{17}{72}, \frac{7}{24}, \frac{11}{54}$; *b*) $\frac{7}{105}, \frac{2}{45}, \frac{10}{147}, \frac{8}{245}, \frac{5}{63}, \frac{4}{75}$.

10. Să se aranjeze în ordine de mărime descrescătoare fracțiile:

$$\frac{11}{1250}, \frac{29}{7500}, \frac{19}{4500}, \frac{7}{600}$$

11. Să se efectueze adunările:

a) $4+\frac{5}{8}$; *b*) $\frac{4}{9}+5$; *c*) $3\frac{5}{54}+2\frac{1}{6}+\frac{4}{9}+3\frac{1}{2}$;

d) $3\frac{4}{9}+7\frac{5}{6}+1\frac{3}{4}+5\frac{7}{8}+4\frac{1}{36}$; *e*) $\frac{25}{252}+\frac{37}{378}$;

f) $2\frac{7}{4950}+3\frac{4}{825}+5\frac{2}{1815}+7\frac{13}{9900}$; *g*) $3\frac{1}{1680}+$

$+5\frac{4}{315}+7\frac{4}{1500}$; *h*) $5\frac{7}{144}+3\frac{5}{360}+1\frac{7}{900}+\frac{5}{288}$;

i) $2\frac{5}{252}+3\frac{11}{210}+\frac{3}{3500}+\frac{5}{378}$; *j)* $\frac{5}{168}+\frac{6}{49}+\frac{9}{56}+$

$+\frac{8}{147}+\frac{5}{84}$; *k)* $5\frac{7}{3600}+2\frac{11}{630}+3\frac{7}{72000}$; *l)* $5\frac{1}{1680}+$

$+2\frac{5}{252}+4\frac{7}{14400}+3\frac{11}{12600}$.

12. Să se facă scăderile:

a) $3-\frac{4}{9}$; *b)* $\frac{18}{5}-2$; *c)* $\frac{53}{63}-\frac{4}{9}$; *d)* $\frac{11}{216}-\frac{5}{324}$;

e) $3\frac{17}{24}-1\frac{3}{8}$; *f)* $6\frac{5}{63}-2\frac{7}{72}$; *g)* $5\frac{8}{225}-2\frac{3}{175}$;

h) $7\frac{5}{648}-2\frac{35}{576}$; *i)* $8\frac{7}{1350}-5\frac{19}{2250}$;

40 - 35

j) $8\frac{11}{288000}-3\frac{7}{3960}$.

13. Să se efectueze operațiile:

$$\left(2\frac{5}{189}+3\frac{1}{252}+15\frac{2}{315}\right)-\left(1\frac{3}{392}+4\frac{4}{175}+2\frac{5}{441}\right)$$

14. Să se efectueze înmulțirile:

a) $\frac{5}{8}\times 4$; *b)* $3\times\frac{7}{9}$; *c)* $\frac{8}{15}\times 5$; *d)* $\frac{15}{16}\times\frac{8}{75}$; $\frac{13}{144}\times\frac{36}{169}$

15. Să se efectueze produsele de mai mulți factori:

a) $\frac{5}{8}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{5}\times\frac{7}{15}\times\frac{10}{21}$; *b)* $\frac{45}{36}\times\frac{49}{90}\times\frac{4}{63}$;

c) $1\frac{23}{25}\times\frac{5}{12}\times 1\frac{17}{18}\times 3\times\frac{4}{7}$; *d)* $3\frac{3}{4}\times\frac{2}{25}\times 3\frac{1}{9}\times\frac{3}{7}$;

e) $4\frac{4}{35}\times 3\frac{29}{72}\times 6\frac{3}{7}$; *f)* $2\frac{2}{35}\times 8\frac{5}{9}\times 1\frac{13}{32}\times 3\frac{2}{81}\times\frac{3}{5}$.

16. Să se efectueze operațiile :

a) $2 \times \frac{3}{20} \times \left(2 - \frac{3}{5}\right) \times \left(3 + \frac{4}{7}\right) \times 5$;

b) $\left(4\frac{3}{5} - 2\frac{4}{15}\right) \times \left(2\frac{5}{14} + 1\frac{4}{35}\right) \times \frac{1}{2}$;

c) $\left(\frac{5}{9} - \frac{7}{27}\right) \times \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \frac{5}{32}\right) \times 2\frac{4}{9} \times 4$;

d) $2 \times \left(5\frac{4}{15} - 2\frac{7}{20}\right) \times \frac{3}{7} \times \left(2\frac{1}{9} + 3\frac{5}{6} + 1\frac{3}{4}\right)$;

e) $\left(2\frac{5}{24} + 1\frac{2}{7} + \frac{7}{72}\right) \times \left(5\frac{6}{35} - 2\frac{3}{5}\right)$.

17. Să se facă împărțirile :

a) $\frac{9}{16} : \frac{3}{20}$; *b)* $\frac{35}{66} : \frac{25}{48}$; *c)* $\frac{5}{99} : \frac{25}{72}$; *d)* $\frac{84}{121} : 7$;

e) $8 : \frac{36}{65}$; *f)* $5\frac{4}{9} : 1\frac{17}{18}$; *g)* $12\frac{21}{32} : 2\frac{23}{56}$;

h) $2\frac{2}{35} : 1\frac{53}{55}$; *i)* $17\frac{1}{72} : 1\frac{67}{108}$.

18. Să se efectueze operațiile :

a) $\left[\left(\frac{3}{25} + \frac{7}{15} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3}\right) \times \frac{5}{139}\right] : \left(\frac{3}{8} - \frac{5}{24}\right)$;

b) $\left[\left(9\frac{17}{132} - 3\frac{5}{154}\right) \times \frac{16}{25}\right] : \frac{8}{9}$;

c) $\left[\left(5 - 2\frac{3}{7}\right) \times \left(5\frac{4}{9} - 3\frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{8}\right] :$

$: \left[\left(2\frac{5}{6} + 1\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) \times \frac{7}{9} \times 5\right]$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

19. Să se pună sub forma cea mai simplă expresiile numerice :

a) $\dfrac{\left(7\dfrac{5}{168}-2\dfrac{35}{126}\right)\times 2\dfrac{2}{5}}{3\dfrac{4}{7}}$;

b) $\dfrac{2\dfrac{2}{5}\times 4\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{9}\times 3\times\dfrac{7}{10}+\dfrac{2}{3}\times 2\dfrac{1}{4}}{3\dfrac{1}{2}:2\dfrac{3}{4}}$;

c) $\dfrac{4\dfrac{5}{7}:2\dfrac{13}{28}}{\dfrac{4}{15}+\dfrac{7}{125}}$; *d)* $\dfrac{\left(\dfrac{1}{450}+\dfrac{7}{900}+\dfrac{11}{1800}-\dfrac{1}{1575}\right)\times 5\dfrac{5}{7}}{\dfrac{9}{42}}$;

e) $\dfrac{\left(\dfrac{11}{75600}+\dfrac{7}{3960}+\dfrac{13}{46200}\right)\times 2\dfrac{6}{7}\times\dfrac{35}{36}}{\dfrac{3}{8}}$;

f) $\dfrac{\left(\dfrac{4}{9}\times\dfrac{2}{7}+\dfrac{5}{6}\times\dfrac{11}{21}+\dfrac{2}{63}\times\dfrac{1}{4}\right)\times\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{25}+\dfrac{13}{125}\right)}{5\times\left(17\dfrac{3}{8}-1\dfrac{53}{56}\right)}$.

20. Într'un vas, unde sunt $2\dfrac{5}{24}$ litri de vin, se toarnă $\dfrac{5}{8}$ litri. Se scot apoi 3 pahare de câte $\dfrac{2}{45}$ litri. Apa rămasă se toarnă în sticle de câte $\dfrac{9}{20}$ l. Să se afle câte sticle se vor umplea.

21. Un om plătește o datorie în 7 rate. Prima dată plătește $\frac{1}{2}$ din datorie; a doua rată este de $\frac{11}{630}$ din datorie; a treia, $\frac{3}{308}$ din datorie; a patra, $\frac{5}{72}$ din datorie; a cincea $\frac{1}{99}$ din datorie; a șasea rată este cu $\frac{191}{360}$ mai mică decât celelalte cinci la un loc; a șaptea oară plătește restul.

Să se afle: *1°*. Ce parte din datorie este a șasea rată; *2°*. Ce parte din datorie este a șaptea rată; cât este datoria întreagă, dacă a șaptea rată este de 7990 lei.

22. Un om plătește o datorie în 7 rate. Prima dată plătește $\frac{1}{3}$ din datorie; a doua rată este fracțiunea $\frac{3}{770}$ din datorie; a treia, $\frac{2}{315}$ din datorie; a patra $\frac{4}{63}$ din datorie; a cincea $\frac{7}{36}$; a șasea rată este cu $\frac{291}{660}$ mai mică ca celelalte cinci rate la un loc. A șaptea oară plătește restul. Să se afle: *1°*. Ce parte din datorie este a șasea rată; *2°*. Ce parte din datorie este a șaptea rată; *3°*. Cât este datoria întreagă dacă a șaptea rată este de 15700 lei.

23. Un om are o sumă de bani. Din ea cumpără 6 cărți, plătind pentru prima $\frac{1}{18}$ din sumă; pentru a doua, $\frac{8}{75}$ din sumă; pentru a treia, $\frac{9}{70}$ din sumă; pentru a patra $\frac{47}{360}$ din sumă; pentru a cincea $\frac{4}{315}$ din sumă; pentru a șasea plătește cu $\frac{83}{450}$ mai puțin ca

pentru cele cinci la un loc; iar restul îl economiseşte. Să se afle ce sumă avea la început, dacă economiseşte 1349 lei.

24. Un om lasă o moştenire să se împartă în felul următor: fiicei sale îi lasă fracţiunea $\frac{173}{504}$ din moştenire; fiului său, îi lasă mai puţin decât fetei cu fracţiunea $\frac{5}{396}$ din moştenire; lasă fracţiunea $\frac{35}{198}$ din moştenire unei societăţi de binefacere; iar restul, care valorează 82800 lei îl lasă unui copil orfan. Să se afle care era moştenirea.

25. Un om lasă o moştenire să se împartă în felul următor: fiicei sale, îi lasă fracţiunea $\frac{173}{2520}$ din moştenire; fiului său, îi lasă mai puţin decât fetei cu fracţiunea $\frac{1}{396}$ din moştenire; lasă fracţiunea $\frac{7}{198}$ din moştenire unei societăţi de binefacere; iar restul, care valorează 16560 lei îl lasă unui copil orfan. Să se afle care era moştenirea şi ce sumă au luat fiecare.

26. Intr'un vas s'a turnat apă în diferite rânduri: întâi, fracţiunea $\frac{79}{525}$ din vas; a doua oară $\frac{25}{252}$ din capacitatea vasului; a treia oară $\frac{29}{630}$ din capacitatea sa; a patra oară $\frac{11}{168}$ din capacitate; a cincea oară mai puţin decât a patra oară cu fracţiunea $\frac{9}{1400}$ din capacitatea sa. Să se afle: 1^0. Ce fracţiune din vas reprezintă apa turnată a cincea oară; 2^0. Ce fracţiune din vas este

plină cu apă după aceste cinci operațiuni; 3°. Ce fracție din vas este partea goală; 4°. Cât este capacitatea vasului, dacă mai trebuesc 974dl. pentru a-l umplea.

(*Răspuns*: 4°. *168 litri*).

27. Intr'un vas s'a turnat apă în diferite rânduri: întâi s'a pus $\frac{261}{2625}$ din capacitatea sa; a doua oară s'a pus mai puțin decât prima dată cu fracțiunea $\frac{9}{3500}$ din vas; a treia oară s'a pus fracțiunea $\frac{9}{84}$ din capacitatea vasului; a patra oară $\frac{32}{1575}$; a cincea oară $\frac{61}{630}$ din capacitatea vasului. Să se afle care e capacitatea vasului dacă mai trebuesc 1014cl pentru a-l umplea.

(*Răspuns*: 1750 cl.)

28. Se repară o șosea în 4 luni. In luna întâi se repară fracțiunea $\frac{253}{1008}$ din șosea; în luna a II-a, $\frac{647}{2520}$ din șosea; a treia lună se repară mai puțin decât în luna a doua cu fracțiunea $\frac{29}{1890}$ din șosea; a patra lună se repară restul. Să se afle: 1°. Ce fracțiune din șosea s'a reparat în luna a IV-a; 2°. Ce lungime avea șoseaua dacă în luna a IV-a s'au reparat 7586m.

29. Se repară o șosea în 4 luni: în luna I se repară fracțiunea $\frac{382}{1575}$ din șosea; în luna a II-a, $\frac{238}{945}$ din soșea; în luna a III-a se repară mai puțin decât în luna a doua cu fracțiunea $\frac{1}{3780}$ din șosea; în luna a IV-a se repară restul de 9602m. Ce lungime avea șoseaua și câți metri s'a reparat în fiecare zi.

30. Un agricultor își pune grâul cultivat într'un hambar: întâi pune $4\frac{2}{45}$ baniță; a doua oară $3\frac{32}{135}$ baniță; a a treia oară, $2\frac{7}{750}$ baniță; a patra oară $5\frac{47}{1125}$ baniță; a cincea oară pune mai puțin decât pusese în cele patru rânduri la un loc, cu $10\frac{24}{225}$ baniță. Se întreabă: *1°*. Câte baniță pusese a cincia oară; *2°*. Câți litri de grâu a pus în total dacă o baniță conține $33\frac{24}{25}$ litri de grâu; *3°*. Câți litri de grâu încap în hambar, dacă cantitatea pusă nu ocupă decât fracțiunea $\frac{283}{5625}$ din hambar.

31. Într'un liceu, numărul elevilor din clasa I reprezintă fracțiunea $\frac{6}{35}$ din numărul total al elevilor; din clasa a II-a, $\frac{9}{56}$ din numărul total; în clasa a III-a sunt de 17 ori diferența dintre numărul elevilor din clasa I și a II-a; în clasa a IV-a sunt $\frac{1}{3}$ din numărul elevilor din cele trei clase la un loc; iar în cursul superior sunt 88 elevi. Să se afle: *1°*. Ce fracție din numărul total al elevilor reprezintă numărul elevilor din clasa a III-a; *2°*. din clasa a IV-a; *3°*. din cursul superior; *4°*. câți elevi erau în toată școala; *5°*. câți elevi erau în fiecare din cele dintâi patru clase.

32. Un om, cumpărând o casă, se învoiește s'o plătească în 6 rate: I, plătește fracțiunea $\frac{2}{21}$ din prețul casei; a doua oară, $\frac{16}{105}$ din prețul casei; a III-a oară,

$\frac{27}{245}$ din prețul casei; a IV-a rată este mai mică ca suma primelor trei cu fracțiunea $\frac{83}{294}$ din prețul casei; a V-a rată este de 2 ori mai mare ca rata a patra; a VI-a este restul de 183300 lei. Să se afle: *1°.* Care este rata a IV-a; *2°.* a V-a; *3°.* ce fracție din preț reprezintă rata a VI-a; *4°.* care este prețul casei; *5°.* câți lei a plătit în fiecare din cele cinci rate.

(*Răspuns*: *4°.*) *441000 lei*).

33. Un om, cumpărând o casă, se învoiește s'o plătească în 6 rate: I, plătește fracțiunea $\frac{4}{33}$ din prețul casei; a-II-a rată este $\frac{23}{165}$ din preț; a III-a, $\frac{29}{198}$ din preț; a patra rată este mai mică ca suma primelor trei rate cu fracțiunea $\frac{243}{825}$ din preț; a cincea rată este de 2 ori mai mare ca a IV-a; a șasea rată este restul de 126400 lei. Să se afle prețul casei și valoarea fiecărei rate.

(*Răspuns*: *Prețul este 495000 lei*).

34. Intr'un teatru $\frac{7}{60}$ din numărul locurilor sunt de stalul I; $\frac{5}{24}$, de stalul al II-lea; în stalul al III-lea sunt de 3 ori mai multe locuri decât diferența dintre numărul locurilor de stalul al II-lea și I; la balcon sunt $\frac{1}{2}$ din numărul locurilor din staluri; iar la galerie sunt 96 locuri. Să se afle: *1°.* câte locuri sunt în total în teatru; *2°.* câte locuri erau în fiecare stal.

(*Răspuns*: *960 locuri în total*).

35. Un moșier seamănă pe fracțiunea $\frac{37}{210}$ din moșia

sa, porumb; ovăz, pe o porțiune mai mică cu fracțiunea $\frac{25}{252}$ din moșie, decât partea cultivată cu porumb; orz, pe o suprafață de 2 ori mai mare decât cea semănată cu ovăz; grâu, pe o suprafață de 3 ori mai mică decât suprafața semănată cu porumb, ovăz și orz. Să se afle: *1°.* ce fracțiune din moșie era cultivată cu ovăz; *2°.* ce fracțiune, cu orz; *3°.* ce fracțiune, cu grâu. Restul îl închiriază în bucăți de câte $\frac{4}{35}$ din moșie. *4°.* La câți oameni se va închiria? *5°.* Câte ha. are moșia dacă partea închiriată este de 432ha?

(*Răspuns*: *5°. 945 ha*).

36. Un proprietar seamănă pe fracțiunea $\frac{37}{168}$ din moșia sa, porumb; ovăz, pe o porțiune mai mică decât partea cultivată cu porumb cu fracțiunea $\frac{79}{630}$ din moșie; orz, pe o suprafață de 3 ori mai mare decât cea semănată cu ovăz; grâu, pe o jumătate din suprafața semănată cu porumb, ovăz și orz; restul îl închiriază în bucăți egale cu fracțiunea $\frac{13}{1680}$ din moșie. Să se afle: *1°.* câte bucăți închiriază; *2°*) câte ha avea moșia, dacă partea închiriată este de 507ha; *3°.* câte ha sunt cultivate cu fiecare fel de cereale.

(*Răspuns*: *2°. 5040ha*).

37. O sumă de bani a fost împărțită între 6 persoane în felul următor; prima persoană a luat fracțiunea $\frac{671}{3360}$ din sumă; a doua, fracțiunea $\frac{583}{2940}$ din sumă; a treia, fracțiunea $\frac{526}{3675}$ din sumă; a IV-a a luat $\frac{1}{2}$ din suma luată de primele două persoane; a V-a, de 3 ori

diferența dintre sumele luate de a II-a și a III-a; a VI-a a luat restul de 22193 lei. Să se afle suma, care s'a împărțit și sumele luate de fiecare persoană.

38. Un proprietar vinde întâi fracțiunea $\frac{37}{288}$ din moșia sa; apoi $\frac{23}{224}$ din moșia sa; a treia dată vinde o parte de 6 ori mai mare decât diferența dintre cele dintâi două părți; a patra oară vinde o parte egală cu $\frac{1}{5}$ din partea vândută a treia oară; restul îl vinde în părți egale cu fracțiunea $\frac{85}{1134}$ din moșie, rămânând astfel o parcelă mai mică ca celelalte. Să se afle câți ari avea moșia dacă parcela mică rămasă avea 5878 ari.

(*Răspuns*: *10080 ari*).

39. Un robinet ar umplea în 3 ore fracțiunea $\frac{291}{416}$ dintr'un bazin; însă după ce curge $1\frac{5}{8}$ ore, se mai deschide un robinet, care ar umplea singur bazinul întreg în $5\frac{7}{9}$ ore. Câte ore vor trece dela deschiderea celui de al II-lea robinet, până se va umplea bazinul, dacă în acest timp curg amândouă robinetele. Câți litri încap în bazin dacă amândouă robinetele dau împreună 650 litri în 2 ore.

40 Un om cletuește $\frac{1}{3}$ din leafă pentru hrană; $\frac{19}{21}$ din această parte, pentru chirie; $\frac{5}{8}$ din rest, pentru îmbrăcăminte; economisește restul de 414 lei. Să se afle ce leafă avea.

(*Răspuns*: *3024 lei*)

*

GEOMETRIE PLANĂ.

Probleme rezolvate.

1. *Pe prelungirile laturilor AB, BC, CA ale unui triunghiu echilateral, se iau segmentele AM, BN, CP egale între ele. Să se demonstreze că triunghiul MNP este echilateral.*

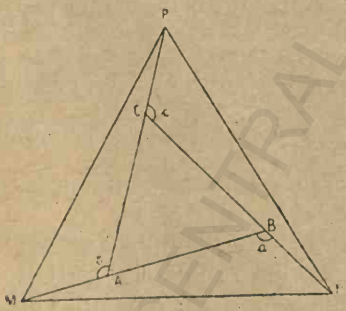

Fig. 1.

Ipoteza.

$AB=BC=CA$

$AM=BN=CP$

Concluzia.

$MN=MP=NP$

Metoda de demonstrație: Pentru a arăta că două segmente sunt egale, se face ca aceste segmente să facă parte ca laturi, fiecare din câte un triunghiu; se dovedește egalitatea triunghiurilor cu ajutorul cazurilor de egalitate a triunghiurilor; se deduce egalitatea segmentelor sprijinindu-se pe teorema: în triunghiuri egale, la laturi egale, se opun unghiuri egale și reciproc.

$MN = MP = NP$

$\Delta MNB = \Delta MPA = \Delta NPC$

$NB = MA = PC$ prin ipoteză

$MB = PA = NC$ ca sume de segmente egale:

$BM = AB + AM$, $AP = AC + CP$ etc.

$\hat{b} = \hat{a} = \hat{c}$ ca suplimente de unghiuri egale

$\hat{B} = \hat{A} = \hat{C}$.

Triunghiurile având două laturi egale și unghiul cuprins între ele, egal, sunt egale după cazul al II-lea de egalitate a triunghiurilor.

Deci unghiurilor b, a, c, egale, li se opun laturi egale, anume $MN = MP = NP$, ceea ce era de demonstrat.

2. *Prin vârfurile unui triunghiu echilateral ABC, se duc în exteriorul triunghiului dreptele AM, BN, CP, care fac cu laturile triunghiului respectiv, AB, BC, CA, unghiuri egale între ele. Să se arate că triunghiul format din aceste trei drepte este echilateral.*

Ipoteza.

$AB = BC = CA$

$\hat{a} = \hat{b} = \hat{c}$.

Concluzia.

$MN = MP = NP$.

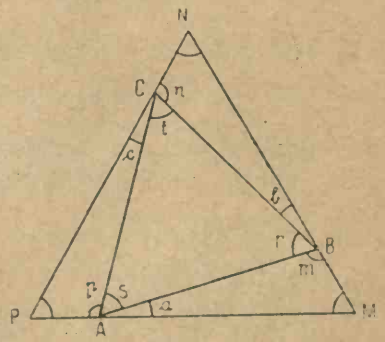

Fig. 2.

Fiindcă segmentele MN, MP, NP, nu fac parte ca laturi din triunghiuri diferite, s'ar putea demonstra

egalitatea lor, arătându-se că sunt formate din segmente egale, anume:

$NB=AM=PC$ și $BN=AP=CN$, ceea ce se poate dovedi prin egalitatea triunghiurior: $\Delta NBC=\Delta AMB=\Delta PCA$.

Se poate încă demonstra transformând concluzia în alta, luată din proprietățile triunghiului echilateral, anume: triunghiul echilateral are toate unghiurile egale și reciproc. Deci este de demonstrat:

$$\hat{M}=\hat{N}=\hat{P}$$

Metoda de demonstrație: Ca să arătăm că două unghiuri sunt egale, întrebuințăm de multe ori aceeași metodă ca și pentru segmente: se face ca unghiurile să facă parte fiecare din câte un triunghiu; se dovedește egalitatea triunghiurilor; de unde rezultă egalitatea tuturor elementelor, anume a unghiurilor opuse la laturi egale și reciproc.

$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P}$

$\Delta MAB = \Delta NBC = \Delta PCA$

$AB = BC = CA$ prin ipoteză.

$\hat{a} = \hat{b} = \hat{c}$ prin ipoteză.

$\hat{m} = \hat{n} = \hat{p} =$ de oare ce: $\hat{m}=180^0-\left(\hat{r}+\hat{b}\right)$

$\hat{n}=180^0-\left(\hat{t}+\hat{c}\right)$ și $\hat{p}=180^0-\left(\hat{s}+\hat{a}\right)$; dar $\hat{r}=\hat{t}=\hat{s}$ ca unghiuri într'un triunghiu echilateral; $\hat{b}=\hat{c}=\hat{a}$, prin ipoteză. Deci dacă din cantități egale (180^0) se scad cantitățile egale $\left(\hat{r}+\hat{b}=\hat{t}+\hat{c}=\hat{s}+\hat{a}\right)$ rămân resturi egale: $\hat{m}=\hat{n}=\hat{p}$.

Triunghiurile având o latură egală, cuprinsă între unghiuri egale, sunt egale după cazul I de egalitate al triunghiurilor.

Deci laturilor AB, BC, CA, egale, li se opun unghiuri M, N, P egale, ceea ce era de demonstrat.

*

Probleme de rezolvat.

1. Pe baza unui triunghiu isoscel ABC, se iau de la vârfurile triunghiului în exterior două segmente AM, BN, egale între ele. Să se demonstreze că triunghiul MNC este isoscel.

2. Pe baza unui triunghiu isoscel ABC, se iau de la vârfurile triunghiului spre interior două segmente AM, BN, egale între ele. Să se demonstreze că triunghiul MNC este isoscel.

3. Se prelungesc laturile egale ale unui triunghiu isoscel AC, BC dincolo de punctul lor de intersecție, cu segmente egale CM, CN. Se duc dreptele AM, BN și se prelungesc până la punctul lor de intersecție P. Să se demonsrteze că triunghiul ABP este isoscel.

4. Din punctul de întâlnire C al laturilor egale AC, BC ale unui triunghiu isoscel se iau dreptele CM, CN, ce fac cu laturile CA, CB respectiv, spre exterior unghiuri egale; aceste drepte se prelungesc până întâlnesc baza (latura neegală cu celelalte) triunghiului isoscel în punctele M, N. Să se arate că triunghiul CMN este isoscel.

5. Pe latura neegală cu celelalte AB a unui triunghiu isoscel, se iau segmentele AM, BN egale între ele; pe laturile egale se iau segmentele AS, BT egale între ele. Se duc dreptele SM, NT, prelungindu-se până la punctul lor de intersecție P.

Să se demonstreze că: 1^0. segmentele SM, NT sunt egale; 2^0. triunghiul MNP este isoscel.

6. Pe latura neegală cu celelalte a unui triunghiu isoscel se iau segmentele AM, BN, egale între ele; pe laturile AC, BC se iau segmentele AS, BT egale între ele. Se unește M cu T și N cu S; fie Q punctul de intersecție al dreptelor MT, NS.

Să se demonstreze că: 1°. segmentele SN, TM sunt egale; 2°. Triunghiul MNQ este isoscel.

7. Medianele corespunzătoare laturilor egale, într'un triunghiu isoscel, sunt egale.

8. Bisectoarele unghiurilor egale, într'un triunghiu isoscel, sunt egale.

9. Înălțimile corespunzătoare laturilor egale, într'un triunghiu isoscel, sunt egale.

10. Pe laturile unui triunghiu echilateral AB, BC, CA se iau segmentele AM, BN, CP egale între ele. Să se arate că triunghiul MNP este echilateral.

11. Prin vârfurile unui triunghiu echilateral se duc în interiorul triunghiului dreptele AM, BN, CP care fac respectiv cu AB, BC, CA unghiuri egale între ele. Fie R, S, T, punctele lor de intersecție.

Să se arate că triunghiul RST este echilateral.

12. Din punctul D, mijlocul laturii AB a unui triunghiu oarecare ABC se duc dreptele DE paralelă la BC și DF paralelă la AC. Se unește E cu F. Să se demonstreze că cele patru triunghiuri formate sunt egale între ele.

13. Din vârfurile unui triunghiu oarecare se duc paralele la laturile opuse până se întâlnesc două câte două.

Să se demonstreze că cele 4 triunghiuri formate sunt egale între ele.

14. Într'un triunghiu oarecare ABC, se ia pe latura AB un punct M oarecare. Prin M se duce paralela la AC, care intersectează în P paralela din C la AB. Prin P se duce paralela la BC care tae în R pe AB. Să se arate că triunghiul MRP este egal cu triunghiul ABC.

15. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale unui patrat se ia în acelaș sens segmentele AM, BN, CP, DR egale

între ele. Să se demonstreze că figura $MNPR$ este un patrat.

16. Pe prelungirile laturilor unui patrat, în acelaş sens, AB, BC, CD DA se iau respectiv segmentele BM, CN, DP, AR egale între ele. Să se demonstreze că figura $MNPR$ este un patrat.

17. Perpendicularele din două vârfuri opuse ale unui dreptunghiu pe diagonala, care uneşte celelalte vârfuri, sunt egale.

18. Pe laturile unui exagon regulat AB, BC, CD, DE, EF, FA, ise iau segmentele AA', BB', CC', DD' EE' FF' egale între ele. Să se arate că figura $A'B'C'D'E'F'$ este un exagon regulat.

19. Pe prelungirile laturilor unui exagon regulat AB, BC, CD, DE, EF, FA, în acleaş sens, se iau respectiv segmentele BB', CC', DD' EE' FF' AA', egale între ele. Să se arate că exagonul $A'B'C'D'E'F'$ este regulat.

20. Se consideră dreptele ce trec prin vârfurile unui patrat $ABCD$ şi fac respectiv cu laturile AB, BC, CD, DA unghiuri egale între ele. Se prelungesc aceste drepte până la intersecţia fiecăruia cu cea precedentă. Să se demonstreze că patrulaterul rezultat este patrat.

21. Intr'un cerc, se împarte o semicircumferinţă în 3 părţi egale, cealaltă semicircumferinţă în 2 părţi egale, iar unul din sferturile de circumferinţă în 2 părţi egale. Să se calculeze unghiurile poligonului format unind punctele de diviziune şi unghiurile a două diagonale oarecare.

CLASA A III-a.

ARITMETICĂ.

Probleme rezolvate.

1. *Un dreptunghiu are lungimea în metri, egală cu media proporţională între 1764 şi 3025; lăţimea* $\frac{9}{11}$ *din lungime. Raportul dintre aria acestui dreptunghiu şi aria unui patrat este* $\frac{4}{11}$. *Să se afle: 1°. Lungimea dreptunghiului; 2°. Lăţimea lui; 3°. Aria patratului; 4°. Latura patratului.*

$1^0.\ \frac{1764}{L} = \frac{L}{3025}$

$L^2 = 1764 \times 3025$

$L = \sqrt{1764 \times 3025} = \sqrt{5336100}$

$L = 2310$ m.

1764	
3025	
8820	
3528	
52920	
5336100	

$2^0.\ l = \frac{2310}{11} \times 9 = 210 \times 9 = 1890$ m.

$\sqrt{5.33.61.00}$ | 2310

13.3 | $43 \times 3 = 129$

46.1 | 461

==00

$3^0.\ \frac{\text{aria dr.}}{\text{aria p.}} = \frac{4}{11}$

$$\text{aria p.} = \frac{\text{aria dr.} \times 11}{4} = \frac{\overset{2}{\smile} \quad \overset{2}{\smile}}{\frac{2310 \times 1890 \times 11}{4}} =$$

$$= 1155 \times 945 \times 11 = 12006225 \text{ m}^3.$$

$$4^0.\ l_4 = \sqrt{12006225}$$

$$l_4 = 3465m$$

$$\sqrt{12.00.62.25} \mid 3465$$

$$30.0 \mid 64 \times 4 = 256$$

$$446.2 \mid 686 \times 6 = 4116$$

$$3462.5 \mid 6925 \times 5 = 34625$$

$$0$$

Extragerea rădăcinii s'ar fi putut face mai repede, extrăgând la fiecare factor după ce ar fi fost descompuşi în factori primi.

$$l_4 = \sqrt{1155 \times 945 \times 11}$$

$$l_4 = \sqrt{3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^2}$$

$$l_4 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$$

$$l_4 = 45 \times 11 \times 7 = 495 \times 7 = 3465m.$$

1155	3	945	3^2
385	5	105	3
77	7×11	35	5×7
1		1	

2. *O femeie, lucrând câte 8 ore pe zi, ţese în 36 zile un covor lung de 6m şi lat de 4m. Câte ore trebue să lucreze pe zi pentru ca în 64 zile să isprăviască un covor cu perimetrul de 28 m, lungimea şi lăţimea fiind proporţionale cu numerile 4 şi 3.*

$$\begin{cases} 2(L + l) = 28 \\ \frac{L}{4} = \frac{l}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L + l = 14 \\ \frac{L}{4} = \frac{l}{3} \end{cases}$$

Se aplică teorema: Intr'un şir de rapoarte egale, suma numărătorilor pe suma numitorilor dă un raport egal cu fiecare din rapoartele date:

$\frac{L + l}{7} = \frac{L}{4} = \frac{l}{3}$ dar $L + l = 14$ aşa că se înlocueşte

$\frac{14}{7} = \frac{L}{4} = \frac{l}{3}$

$L = \frac{14 \times 4}{7} = 8$ m

$l = \frac{14 \times 3}{7} = 6$ m.

Problema este de regulă de trei compusă deoarece mărimea, numărul orelor zilnice depinde de mărimile: timp, lungimea covorului, lăţimea covorului şi anume: este invers proporţională cu timpul, direct proporţională cu lungimea şi lăţimea. Apoi din fiecare mărime se cunosc câte două valori afară de o mărime din care se cunoaşte o valoare şi una este de aflat:

No. ore	T	L	l
8 ore	36 zile	6 m	4 m
x	64 „	8 m	6 m

Rezolv problema prin reducere la unitate.

6m ..4m. .36 zile .. 8 ore
8m. .6m. .64zile . . x

6.....4.....36..... 8

1.....4.....36..... $\frac{8}{6}$

1.....1....36..... $\frac{8}{6\times4}$

1.....1.....1..... $\frac{8\times36}{6\times4}$

8.....1..... 1..... $\frac{8\times36\times8}{6\times4}$

8.....6.....1..... $\frac{8\times36\times8\times6}{6\times4}$

8.....6.....64..... $\frac{8\times36\times8\times6}{6\times4\times64}$

$$x=\frac{8\times36\times8\times6}{6\times4\times64}=9 \text{ ore.}$$

Problema se poate rezolvi încă aplicând teorema: Dacă o mărime depinde de alte mărimi, fiind sau direct sau invers proporţională cu fiecare din ele, raportul a două valori din acea mărime este egal cu produsul rapoartelor valorilor corespunzătoare din celelalte mărimi, directe pentru mărimile direct proporţionale, inverse pentru mărimile invers proporţionale.

Adică:

$$\frac{8}{x}=\frac{64}{36}\times\frac{6}{8}\times\frac{4}{6}$$

$$\frac{8}{x}=\frac{64\times6\times4}{36\times8\times6}$$

$$x=\frac{8\times36\times8\times6}{64\times6\times4}=9 \text{ ore.}$$

*

Probleme de rezolvat.

1. Să se extragă rădăcina patrată din numerele:
a) 144; *b*) 71289; *c*) 732736; *d*) 648025; *e*) 642,1156 *f*) 5438,254; *g*) 64004,597.

2. Să se extragă rădăcina patrată cu aproximație de 0,01 din numerele: 2, 3, 5, 7.

3. Să se extragă rădăcina patrată cu aproximație de 0,001 din numerele: 47, 468, 1357, 24680.

4. Să se extragă rădăcina patrată din fracțiile:

$$\frac{121}{169}, \frac{4527}{9}, \frac{23575}{32}, \frac{5372}{18794}.$$

5. Să se calculeze al patrulea proporțional între numerele:
a) 84, 72, 525; *b*) 84, 45, 112; *c*) 72, 42, 132; *d*) 756, 375, 1364; *e*) 144, 98, 648; *f*) 567, 168, 648; *g*) $\frac{3}{5}, \frac{9}{20}, \frac{2}{15}$.

6. Să se calculeze media proporțională între numerele:
a) 147, 75; *b*) 196, 441; *c*) 819, 2275; *d*) 525, 189; *e*) 72, 968; *f*) 847, 4107; *g*) 5,88 și 507; *h*) 4,32 și 5,479 cu aproximație de 0,0001.

7. Să se împartă numărul 18900 în părți direct proporționale cu numerile: 5, 7, 9.

8. Să se împartă numărul 252000 în părți direct proporționale cu numerile: 2, 3, 7.

9. Să se împartă numărul 336000 în părți direct proporționale cu numerele: 2, 5, 8, 9.

10. Să se împartă numărul 41040 în părți invers proporționale cu numerele: 3, 4, 5, 6.

11. Cât costă 17kg zahăr dacă 8kg costă 272 lei?

12. 15 lucrători cosesc un lan în 14 zile; în câte zile l-ar cosi 7 lucrători?

13. Un tren face 215km în 5 ore; în cât timp ar face 301km?

14. Un tren face un drum în 15 ore, mergând cu iuțeala de 72km pe oră; în câte ore ar face același drum cineva ar merge cu iuțeala de 54km pe oră?

15. 9m de stofă costă 2313 lei, cât costă 5m?

16. Dacă 3 pași fac 2m, câți metri sunt în 273 pași?

17. Citind câte 8 ore pe zi, se isprăvește de citit o carte în 15 zile; în cât timp s'ar isprăvi dacă s'ar citi 5 ore pe zi?

18. In $\frac{3}{8}$ dintr'o carte sunt 216 pagini; câte pagini sunt în toată cartea?

19. In $\frac{5}{9}$ dintr'un drum sunt 42km; câți km sunt în drumul întreg?

20. $\frac{4}{7}$ dintr'o sumă valorează 2860 lei; cât valorează $\frac{3}{8}$ din aceiaș sumă?

21. In 27 zile, 25 lucrători au cosit un lan lung de 2250m și lat de 540m, lucrând câte 9 ore pe zi. Câți lucrători vor cosi un lan lung de 2160m și lat de 140m, în 12 zile, lucrând câte 7 ore pe zi?

(*Răspuns*: *18 lucrători*).

22. 140 lucrători, lucrând câte 7 ore pe zi, au secerat un lan de 455ha în 36 zile. In câte zile se vor secera 30ha de către 18 lucrători, cari lucrează câte 8 ore pe zi?

23. Cu suma de 17110 lei, s'au plătit 15 lucrători pe timp de 18 zile, lucrând câte 8 ore pe zi. Pentru câte zile va ajunge suma de 4860 lei ca să se plătească 27 lucrători, care lucrează câte 5 ore pe zi?

24. Intr'o grădină patrată de pomi, fracțiunea $\frac{7}{36}$ din numărul total al pomilor sunt nuci; peri sunt mai puțini decât nuci cu fracțiunea $\frac{13}{144}$ din numărul total al pomilor; meri sunt de 3 ori mai mulți decât peri; iar pruni sunt o jumătate din numărul total al nucilor, perilor și merilor; restul pomilor sunt caiși în număr de 12. Să se afle: 1°. câți pomi erau în total și câți de fiecare fel; 2°. cât este latura grădinii dacă fiecare pom ocupă o suprafață de $4m^2$.

(*Răspuns*: 2°. $L_4 = 144m$).

25. Un negustor își calculează prețul mărfei sale astfel: la prețul cumpărării adaogă 8% din acest preț, dobânda capitalului, 2,50% chiria localului; 1,50% cheltueli de transport, 5% impozite către stat; 4% plata personalului; 3% diverse alte cheltueli și 14% câștigul său. Cu cât cumpărase o marfă, pe care o vinde cu 276000 lei. Care este câștigul său? Acest câștig se împarte între trei tovarăși, proporțional cu numerele 2, 5, 7. Ce parte ia fiecare?

26. Valoarea nominală a unei polițe este de 8122 lei. Ziua scadenței este la 10 Aprilie. Care este valoarea actuală a ei în ziua de 9 Februarie același an, procentul fiind 9%. In acea zi se schimbă polița în alte trei, a căror valori în acea zi sunt proporționale cu numerele 3, 6, 7. Ce valori nominale vor avea aceste 3 polițe, ziua scadenței fiind 25 Aprilie, aceleaș an, procentul acelaș 9%.

27. O femeie lucrând câte 9 ore pe zi, țese în 24 zile un covor lung de 5,60m. lat de 3,15m. In câte zile ar putea isprăvi un covor a cărui lungime este $\frac{5}{4}$ din lungimea primului covor și a cărui lățime este medie

proporțională între lungimea și lățimea primului covor, dacă lucrează câte 8 ore pe zi.

(*Răspuns*: *45 zile*).

28. 27 lucrători, lucrând câte 7 ore pe zi, au arat un câmp patratic de 63504m² în 9 zile. Câți lucrători vor trebui ca să are în 3 zile, lucrând câte 9 ore pe zi un câmp dreptunghiular a cărui lungime este egală cu latura patratului și a cărui lățime este $\frac{5}{7}$ din lungime? (*Răspuns*: *45 lucrători*)

29. 16 lucrători, lucrând câte 9 ore pe zi, au arat un câmp patratic de 28224m² în 4 zile. Câți lucrători vor trebui pentru a ara în 9 zile un câmp dreptunghiular a cărui lățime este egală cu latura primului loc și a cărui lungime este $\frac{9}{8}$ din lățime, lucrând câte 8 ore pe zi? (*Răspuns*: *9 lucrători*)

30. Dacă 24 lucrători au secerat în 15 zile un lan lung de 735m, lat de 135m, în câte zile 49 lucrători vor secera un lan a cărui lățime este medie proporțională între lungimea și lățimea primului loc și a cărui lungime este a patra proporțională între lățimea și lungimea primului lan și lățimea sa proprie?

(*Răspuns*: *l=315m, L=1715m. Nr. zilelor=40 zile*).

31. Dacă 27 lucrători au secerat în 9 zile un lan lung de 588m, lat de 108m, în câte zile 21 lucrători vor secera un lan a cărui lățime este medie proporțională între lungimea și lățimea primului lan și a cărui lungime este a patra proporțională între lățimea și lungimea primului lan și lățimea sa proprie.

(*Răspuns*: *l=252m, L=1372m Nr. zilelor=63.*)

32. Un loc de forma unui patrat a fost astfel împărțit între 5 persoane: prima a luat fracțiunea $\frac{7}{45}$

din loc; a II-a, fracțiunea $\frac{4}{35}$ din loc; a treia a luat o parte egală cu media proporțională dintre părțile luate de primele două persoane; a IV-a persoană a luat o parte egală cu a patra proporțională dintre părțile luate de celelalte trei; a cincea persoană a luat 17820 ari. Se întreabă: *1°*. Ce suprafață are locul; *2°*. Ce parte a luat fiecare persoană, în ari; *3°*. Cât este latura patratului.

(*Răspuns*: *1°. 35721 ari*; *3°. 189dam*).

33. Un loc de forma unui patrat a fost astfel împărțit între 5 persoane: prima a luat fracțiunea $\frac{15}{56}$ din loc; a doua, fracțiunea $\frac{6}{35}$ din loc; a III-a, a luat o parte egală cu media proporțională dintre părțile luate de primele două persoane; a IV-a persoană a luat o parte egală cu a patra proporțională dintre părțile luate de celelalte trei; a V-a a luat 26918 ari. Să se afle: *1°*. Ce suprafață are locul; *2°*. Câți ari a luat fiecare persoană; *3°*. Cât este latura patratului.

(*Răspuns*: *1°. 176400 ari*; *3°. 420dam*).

34. Un loc dreptunghiular are lungimea de 6 ori cât lățimea și aria de 12150 ari. Să se găsiască lățimea dreptunghiului. Un alt loc are lungimea sa egală cu lățimea primului loc, iar lățimea este a patra proporțională între lățimea primului loc, fracțiunea $\frac{5}{6}$ din ea și fracțiunea $\frac{2}{3}$ din ea. Să se afle aria acestui loc. In câte zile 8 lucrători ar cosi acest loc, lucrând câte 8 ore pe zi, dacă 9 lucrători cosesc în 6 zile un loc de 750 ari, lucrând câte 8 ore pe zi?

(*Răspuns*: $l = 45\,dam.$ *aria* $= 1125\,ari$)

GEOMETRIE PLANĂ.

Probleme rezolvate.

1. *Un triunghiu ABC, asemenea cu altul, cu laturile de 7 cm, 24 cm, 25 cm, are perimetrul de 1176 cm. 1º. Să i se găsească laturile. Pe latura cea mai scurtă AB5, se ia punctul M, ce împarte latura în raportul* $\frac{5}{16}$; *pe latura mijlocie, AC, punctul N astfel că segmentul AN să fie* $\frac{8}{21}$ *din latura întreagă. 2º. Să se calculeze segmentele de pe AB şi AC; 3º. Să se cerceteze dacă MN este paralelă la BC. Prin M se duce paralela la AC; prin N, paralela la AB, drepte ce intersectează pe BC în S şi T. 4º. Să se calculeze segmentele de pe BC.*

$$1º.\ \begin{cases} AB + AC + BC = 1176 \\ \dfrac{AB}{7} = \dfrac{AC}{24} = \dfrac{BC}{25} \end{cases}$$ laturile sunt proporţionale în triunghiuri asemenea.

Aplic teorema: Într'un şir de rapoarte egale, suma numărătorilor pe suma numitorilor dă un raport egal cu fiecare din rapoartele date.

$\frac{AB + AC + BC}{7 + 24 + 25} = \frac{AB}{7} = \frac{AC}{24} = \frac{BC}{25} = \frac{1176}{56}$, valoarea primului raport; deci:

$$AB = \frac{7 \times 1176}{56} = \frac{7 \times 147}{7} = 147 \text{ cm.}$$

$$AC = \frac{24 \times 1176}{56} = \frac{24 \times 147}{7} = 24 \times 21 = 504 \text{cm.}$$

$$BC = \frac{1176 \times 25}{56} = \frac{147 \times 25}{7} = 21 \times 25 = 525 \text{ cm.}$$

$$\begin{array}{cc} 24 & 25 \\ 21 & 21 \\ \hline 24 & 25 \\ 48 & 50 \\ \hline 504 & 525 \end{array}$$

2°.

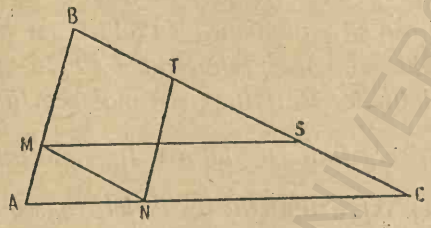

Fig. 3.

$$\begin{cases} AM + MB = 147 \\ \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{5}{16} \text{ sau} \end{cases}$$

$\frac{AM}{5} = \frac{MB}{16}$ schimbând mezii între ei.

Aplic teorema asupra rapoartelor egale:

$$\frac{AM + MB}{5 + 16} = \frac{AM}{5} = \frac{MB}{16} = \frac{147}{21} \text{ de unde:}$$

$$AM = \frac{5 \times 147}{21} = \frac{5 \times 21}{3} = 5 \times 7 = 35 \text{ cm.}$$

$$MB = 147 - 35 = \frac{147 \times 16}{21} = 7 \times 16 = 112 \text{ cm.}$$

$$AN = \frac{AC}{21} \times 8 = \frac{504 \times 8}{21} = \frac{168 \times 8}{7} = 24 \times 8 = 192 \text{ cm.}$$

$$NC = 504 - 192 = 312 \text{ cm.}$$

3°. Pentru a se vedea dacă MN este paralelă la BC, se întrebuinţează reciproca teoremei lui *Thales*: O dreaptă, care împarte două laturi ale unui triunghiu în segmente proporţionale, (în acelaş raport) este paralelă cu latura de a treia. Trebuie să se compare rapoartele $\frac{AM}{MB}$ şi $\frac{AN}{NC}$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{5}{15}$$

$$\frac{AN}{NC} = \frac{192}{312} \overset{4}{=} \frac{48}{78} \overset{6}{=} \frac{8}{13}$$

$$\text{dar, } \frac{5}{16} < \frac{8}{13} \text{ deci } \frac{AM}{MB} \neq \frac{AN}{NC}.$$

aşa dar dreapta MN nu e paralelă la BC.

4°. Pentru calculul segmentelor CT, TB se aplică teorema lui *Thales* sub forma: O paralelă la una din laturile unui triunghiu împarte pe celelalte două în părţi proporţionale, anume laturile întregi sunt proporţionale cu segmentele de la bază sau cu cele de la vârf.

$$\frac{CA}{AN} = \frac{CB}{BT} \text{ şi } \frac{CA}{NC} = \frac{CB}{CT}$$

$$\frac{504}{192} = \frac{525}{BT} \text{ şi } \frac{504}{312} = \frac{525}{CT}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 13 \\ \hline 75 \\ 25 \\ \hline 325 \end{array}$$

$$BT = \frac{192 \times 525}{504} \overset{6}{=} \frac{32 \times 525}{84} \overset{4}{=} \frac{8 \times 525}{21} \overset{21}{=} 8 \times 25 = 200 \text{ cm.}$$

$$CT = \frac{312 \times 525}{504} \overset{6}{=} \frac{52 \times 525}{84} \overset{4}{=} \frac{13 \times 525}{21} \overset{21}{=} 13 \times 25 = 325 \text{ cm.}$$

Pentru calculul segmentelor CS, SB, aplic teorema lui *Thales* sub forma: O paralelă la una din laturile unui triunghiu împarte pe celelalte două în același raport.

$\frac{CS}{SB} = \frac{AM}{MB} = \frac{5}{16}$ de unde, aplicând o proprietate a proporțiilor:

$\frac{CS+SB}{CS} = \frac{5+16}{5}$ și $\frac{CS+SB}{SB} = \frac{5+16}{16}$ adică:

$\frac{525}{CS} = \frac{21}{5}$ și $\frac{525}{SB} = \frac{21}{16}$ de unde,

$$CS = \frac{\overset{21}{\overbrace{525} \times 5}}{21} = 25 \times 5 = 125 \text{ cm.}$$

$$SB = \frac{\overset{21}{\overbrace{525} \times 16}}{21} = 25 \times 16 = 5^2 \times 2^4 = 400 \text{ cm.}$$

$$TS = CT - CS = 325 - 125 = 200 \text{ cm.}$$

2. *Ariile unui triunghiu dreptunghiu și a unui exagon regulat sunt proporționale cu numerele 35 și $27 \times \sqrt{3}$. Să se găsească: 1°. Aria exagonului regulat; 2°. Latura lui, știind că triunghiul dreptunghiu are ipotenuza de 53 cm. și o catetă de 28 cm. Se consideră cercul înscris în exagon și în acest cerc o coardă egală cu latura triunghiului echilateral înscris. Să se găsească. 3°. Aria segmentului circular mărginit de această coardă și de arcul mai mic decât un semicerc subîntins de coardă.*

1°. $\frac{\text{Aria tr.}}{35} = \frac{\text{Aria ex.}}{27 \times \sqrt{3}}$.

$$\text{Aria ex.} = \frac{27 \times \sqrt{3} \times \text{Aria tr.}}{35}$$

$$\text{Aria tr.} = \frac{b \times \hat{\imath}}{2} = \frac{AB \times CA}{2}$$

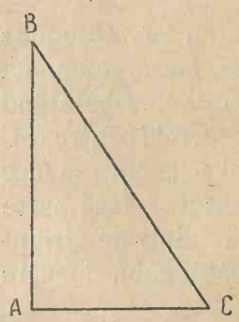

Fig. 4

$BC = 53$ cm. $AC = 28$ cm.

Pentru găsirea catetei AB se aplică teorema lui *Pythagora*; Intr'un triunghiu dreptunghiu, patratul unei catete este egal cu diferența dintre patratul ipotenuzei și patratul celeilalte catete.

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = 53^2 - 28^2 =$$
$$= 2809 - 784 = 2025$$

$$AB = \sqrt{2025} = 45 \text{ cm.}$$

$$\begin{array}{r} 53\times \\ 53 \\ \hline 159 \\ 265 \\ \hline 2809 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28\times \\ 28 \\ \hline 224 \\ 56 \\ \hline 784 \end{array}$$

$$\text{Aria tr.} = \frac{45 \times 28}{2} = 45 \times 14 =$$
$$= 90 \times 7 = 630 \text{ cm}^2$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{20.25} & 45 \\ \hline 42.5 & 85 \times 5 = \\ 0 & 425 \end{array}$$

$$\text{Aria ex.} = \frac{27 \times \sqrt{3} \times \overset{7}{\overbrace{630}}}{35} =$$

$$= \frac{27 \times \sqrt{3} \times \overset{5}{\overbrace{90}}}{5} = 27 \times \sqrt{3} \times 18 = 243 \times 2 \times \sqrt{3}$$

$$\text{Aria ex.} = 486\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

2⁰. Pentru a găsi latura exagonului regulat, se rezolvă mai întâi problema inversă a acesteia, anume: dându-se latura unui exagon regulat, să se găsească aria; și apoi,

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

din relația găsită dintre arie și latura, se poate găsi latura când aria e cunoscută.

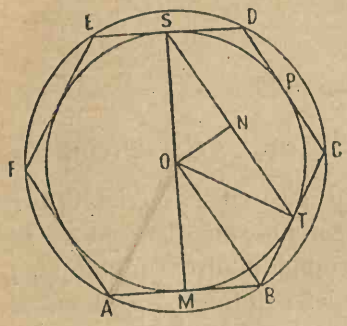

Fig. 5

$$\text{Aria ex.} = \frac{6 \times L \times a}{2} = 3 \times L \times a.$$

L, latura, se presupune cunoscută, iar a, apotema se calculează, întrebuințând metoda generală pentru calculul unui segment : se face ca segmentul să facă parte ca latură dintr'un triunghiu dreptunghiu, în care se aplică *teorema lui Pythagora*.

$$\overline{OM}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{MB}^2$$

$a^2 = R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2$ dar *raza este egală cu latura exagonului după o teoremă cunoscută.*

$$a^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{L^2 \times 4 - L^2}{4} = \frac{L^2 \times (4-1)}{4} = \frac{L^2 \times 3}{4}.$$

$$a = \sqrt{\frac{L^2 \times 3}{4}} = \frac{L \times \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Aria ex.} = 3 \times L \times \frac{L \times \sqrt{3}}{2} = \frac{3 \times L^2 \times \sqrt{3}}{2} = L^2 \times \frac{3 \times \sqrt{3}}{2}$$

Adică L^2 este un număr care înmulțit cu fracția $\frac{3 \times \sqrt{3}}{2}$ dă aria, deci L^2 este câtul dintre arie și $\frac{3 \times \sqrt{3}}{2}$, după definiția împărțirii.

$$L^2 = \frac{\text{aria ex.}}{\frac{3 \times \sqrt{3}}{2}} = \frac{2 \times \text{aria ex.}}{3 \times \sqrt{3}} =$$

$$\sqrt{3.24} \mid 18$$
$$224 \mid 28\times$$
$$0 \mid 8$$
$$224$$

$$= \frac{2 \times \overset{3}{\overbrace{486}} \times \sqrt{3}}{3 \times \sqrt{3}} = 2 \times 162 = 324.$$

$L = \sqrt{324} = 18$ cm.

3°. Aria segm. SPT = aria sect. $SOTP$ — aria tr. SOT.

$$\text{aria sect.} = \frac{\pi \times r^2 \times n^0}{360^0}$$

Raza acestui cerc este apotema exagonului regulat

$$r = \frac{L \times \sqrt{3}}{2} = \frac{18 \times \sqrt{3}}{2} = 9 \times \sqrt{3}.$$

Coarda ST fiind latura triunghiului echilateral înscris, subîntinde a treia parte din cerc, deci $n^0 = 120^0$.

$$\text{Aria sect. } SOPT = \frac{\pi \times r^2 \times 120}{360} = \frac{\pi \times r^2}{3}$$

$$\text{Aria tr. } SOT = \frac{ST \times ON}{2}\ ;\ ST = L_3 = r \times \sqrt{3} \text{ după}$$

o teoremă cunoscută.

$$ON^2 = r^2 - \left(\frac{r \times \sqrt{3}}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2 \times 3}{4} = \frac{r^2 \times 4 - r^2 \times 3}{4} =$$

$$= \frac{r^2 \times (4-3)}{4} = \frac{r^2}{4}$$

$$ON = \frac{r}{2}$$

$$\text{Aria } SOT = \frac{r \times \sqrt{3} \times \frac{r}{2}}{2} = \frac{r \times \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Aria segm. } SPT = \frac{\overset{4}{\pi} \times r^2}{3} - \frac{r^2 \times \overset{3}{\sqrt{3}}}{4} =$$

$$= \frac{4 \times \pi \times r^2 - 3 \times r^2 \times \sqrt{3}}{12} = \frac{r^2 \times (4 \times \pi - 3 \times \sqrt{3})}{12}$$

$$\text{Aria segm. } SPT = \frac{9^2 \times \overset{3}{3} \times (4 \times 3{,}14 - 3 \times 1{,}73)}{12} =$$

$$= \frac{81 \times (12{,}56 - 5{,}19)}{4} = \frac{81 \times 7{,}37}{4}$$

$$\text{Aria segm. } SPT = \frac{596{,}97}{4} = 149{,}2425 \text{ cm}^2.$$

7,37
81
737
5896
596,97

*

Probleme de rezolvat.

1. Pe latura AB a unui triunghiu ABC se ia un punct M ce împare latura în raportul $\frac{5}{7}$. Să se găsiască segmentul MB şi latura AB, dacă $AM=225$ cm. Laturile BC şi AC sunt de 456 cm şi 480 cm. Prin M se duce paralela MN la AC şi MP la BC. Să se calculeze segmentele ce aceste paralele determină pe laturi. Să se cercetеze dacă NP este paralelă la AB.

2. Laturile AB, BC şi CA ale unui triunghiu sunt de 432 cm. 640 cm, 128 cm. Pe latura AB se ia punctul M ce împarte latura în raportul $\frac{3}{5}$. Din punctul M se duc paralelele MN şi MP la BC şi AC. Să se calculeze cele 6 segmente de pe laturi. Să se cercetеze dacă dreapta MP este paralelă la AB.

3. Laturile AB, BC, CA ale unui triunnghiu sunt de 378 cm. 406 cm, 490 cm. Pe latura AB se ia punctul M

ce împarte latura în raportul $\frac{5}{9}$. Din punctul M se duc paralelele MN și MP la BC și AC. Să se calculeze cele 6 segmente de pe laturi. Să se cerceteze dacă NP este paralelă la AB.

4. Laturile AB, BC, CA ale unui triunghiu sunt de 423 cm., 657 cm, 135 cm. Pe latura AB se ia punctul M ce împarte latura în raportul $\frac{2}{7}$. Din punctul M se duc paralelele MN și MP la BC și AC. Să se calculeze cele 6 segmente de pe laturi. Să se cerceteze dacă dreapta NP este paralelă la AB.

5. Laturile AB, BC și CA ale unui triunghiu sunt de 216 cm, 288 cm, 360 cm. Pe AB se ia segmentul $BM=90$ cm; pe BC, segmentul $BN=168$ cm. Să se cerceteze dacă MN este paralelă la AC. Prin N se duce paralela la AB, care tae pe AC în P. Să se calculeze segmentele de pe AC. Se unește P cu M. Să se cerceteze dacă MP este paralelă la BC.

6. Un triunghiu ABC are laturile AB, BC, CA egale cu 2520 m, 2016 m, 1512 m. Pe AB se ia punctul M astfel că raportul segmentelor AM și MB este $\frac{5}{16}$. Pe BC, un punct N asftel că BN este $\frac{5}{16}$ din latura întreagă. Să se calculeze segmentele de pe aceste laturi. Să se cerceteze dacă dreapta MN este paralelă la AC. Prin M se duce paralela la BC, prin N la AB; să se găsească segmentele determinate pe AC. Să se găsească laturile unui triunghiu asemenea cu cel dat, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{50400}$.

7. Perimetrul unui triunghiu este de 108 mm; iar laturile AB, BC și CA sunt proporționale cu numerele

3, 4, 5. Să se calculeze laturile și să se construiască triunghiul. Pe AB se ia un punct M care împarte pe AB în raportul $\frac{4}{9}$. Prin M se duce paralela la AC, care tae pe BC în N. Să se calculeze cele patru segmente determinate pe laturi și lungimea paralelei.

8. Laturile AB, BC, CA ale unui tringhiu sunt 468m, 540 m și 612 m. Pe AB se ia un punct M ce împarte pe AB în raportul $\frac{5}{7}$. Prin M se duce paralela la AC, ce întâlnește pe BC în N. Să se calculeze laturile triunghiului mic format. Se prelungește MN dincolo de punctul N până întâlnește în P paralela dusă din C la AB. Să se calculeze laturile triunghiului NCP.

9. Laturile AB, BC și CA ale unui triunghiu sunt de 156 m, 195 m și 234 m. Pe AB se ia punctul M ce împarte pe AB în raportul $\frac{4}{9}$. Prin M se duce paralela la AC, ce întâlnește pe BC în N. Să se calculeze laturile triunghiului mic format. Se prelungește MN dincolo de punctul M până întâlnește în P paralela din A la BC. Să se calculeze laturile triunghiului AMP.

10. Intr'un triunghiu, latura AB este de 936 cm, latura AC este $\frac{5}{13}$ din AB; iar raportul laturii CB către AC este $\frac{12}{5}$. Să se găsească laturile necunoscute. Pe AB se ia punctul M ce împarte latura în raportul $\frac{5}{7}$. Prin M se duc paralelele la celelalte laturi, MN și MP. Să se calculeze segmentele astfel determinate. Să se cerceteze dacă dreapta NP este paralelă cu AB.

11. Într'un triunghiu latura AB este de 648 cm, latura AC este $\frac{13}{12}$ din AB, iar raportul laturii CB către AC este $\frac{5}{13}$. Să se găsească laturile necunoscute. Pe AB se ia punctul M ce împarte latura în raportul $\frac{4}{5}$. Prin M se duc paralelele la celelalte două laturi.: MN, MP. Să se calculeze segmentele astfel determinate. Să se cerceteze dacă drapta NP este paralelă la AB.

12. Într'un triunghiu laturile AB, AC și CB sunt proporționale cu numerele 8, 15, 17; iar perimetrul triunghiului este de 1720 cm. Să se găsească laturile. Pe AB se ia punctul M, ce împarte latura AB în raportul $\frac{3}{5}$; pe AC punctul N astfel că segmentul AN este $\frac{31}{43}$ din latura întreagă. Să se calculeze segmentele de pe laturi. Să se cerceteze dacă MN este paralelă la BC. Prin M se duce paralela la AC, prin N paralela la AB, drepte care intersectează pe BC în S și T. Să se calculeze segmentele de pe BC.

13. Laturile unui triunghiu AB, BC, CA sunt de 64mm, 80mm, 48mm. Latura AB este împărțită în trei segmente: AM, MN, NB proporționale cu numerele 3, 5, 8. Să se calculeze cele 3 segmente. Prin M se duce paralela MM' la AC, prin N paralela NN' la BC. Să se calculeze segmentele determinate pe celelalte laturi. Să se cerceteze dacă $M'N'$ este paralelă cu AB.

14. Pe un segment AB=60mm. se iau trei segmente proporționale cu numerele 5, 3, 4. Fie M, N punctele de diviziune. Să se calculeze cele 3 segmente. Prin A se duce o dreaptă oarecare AS, pe care se ia un segment

AR=35mm. Se unește M cu R. Prin N și B se duc paralele la MR. Să se calculeze segmentele determinate pe AS.

15. Pe un segment AB=396cm, se consideră punctul M ce împarte segmentul în raportul $\frac{3}{8}$ și punctul N ce împarte segmentul MB în raportul $\frac{5}{7}$. Să se calculeze mărimea segmentelor AM, MN, NB. Se duce un segment AS=660cm, făcând un unghiu oarecare cu AB. Se unește B cu S. Prin punctele M, N se duc paralele la BS ce întâlnesc pe AS în punctele R, P. Să se calculeze segmentele AR, RP, PS. Să se demonstreze că dacă se dă o mișcare de rotație dreptei AS în jurul punctului fix A, dreptele MR, NP și BS rămân paralele între el în fiecare poziție.

16. Pe un segment AB=396cm. se consideră punctul M ce împarte segmentul în raportul $\frac{5}{7}$ și punctul N ce împarte segmentul MB în raportul $\frac{3}{8}$. Să se calculeze segmentele AM, MN, NB. Se duce un segment AS=660 cm, făcând un unghiu oarecare cu AB. Se unește B cu S. Prin, M, N se duc paralele la BS, ce tae pe AS în punctele R. P. Să se calculeze segmentele de pe AS. Să se demonstreze că, dacă se dă o mișcare de rotație dreptei AS în jurul lui A, în fiecare poziție dreptele MR, NP, și BS sunt paralele intre ele.

17. Intr'un triunghiu, latura AB este $\frac{3}{5}$ din BC, AC este $\frac{4}{5}$ din BC, iar perimetrul triunghiului este de 864cm. Să se găsească lungimile laturilor triunghiului. Pe laturile AB, AC, BC se iau corespunzător segmentele

AM, AN, BP proporționale cu numerele 3, 4, 5, suma lor fiind de 360 cm. Să se găsească aceste segmente. Se unesc punctele M, N, P. Să se cerceteze dacă laturile triunghiului MNP sunt paralele cu laturile triunghiului ABC.

18. Dintr'un punct M exterior unui cerc se duc secantele MAB, MCD; să se dovedească că produsul segmentelor de pe o secantă este egal cu produsul segmentelor de pe cealaltă secantă, toate segmentele având originea în punctul M. Să se calculeze MD dacă $MA=27$ cm. $MB=48$ cm, $MC=36$cm.

19. Dintr'un punct M exterior unui cerc se duce secanta MAB și tangenta MC; să se dovedească că produsul segmentelor de pe secantă este egal cu patratul segmentului de pe tangentă, toate segmentele, având originea în M. Să se calculeze MC dacă $MA=28$ cm. $MB=63$cm.

20. Dintr'un punct M exterior unui cerc se duc două secante MAB și MCD. Să se calculeze MD dacă $MB=792$cm, dacă punctul A împarte segmentul MB în raportul $\frac{3}{8}$ și dacă $MC=396$ cm. Să se construiască o figură asemenea cu cea din problemă, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{180}$.

21. Dintr'un punct M interior unui cerc se duc două coarde. Să se demonstreze că produsul segmentelor de pe o coardă este egal cu produsul segmentelor de pe cealaltă coardă, toate segmentele având o extremitate în M. Fie AMB, CMD cele două coarde. Să se calculeze MD dacă $AB=504$ cm, dacă punctul M împarte segmentul AB în raportul $\frac{5}{9}$ și dacă $MC=270$cm. Să se con-

struiască o figură asemenea cu figura din problemă, alegându-se un raport de asemănare astfel ca figura să încapă pe o foaie de caet și segmentele să fie reprezentate în unități întregi, centimetri sau milimetri.

22. Să se găsească ipotenuza unui triunghiu dreptunghiu dacă catetele sunt de 95cm și 228cm.

23. Să se găsiască ipotenuza unui triunghiu dreptunghiu dacă catetele sunt de 63m și 280 m.

24. Să se găsiască ipotenuza unui triunghiu dreptunghiu, care are catelele de 435dm și 1044dm.

25. Intr'un triunghiu dreptunghiu, ipotenuza este de 85cm. o catetă de 13cm; să se găsiască cealaltă catetă.

26. Intr'un triunghiu dreptunghiu, o catetă este de 72cm, iar ipotenuza de 97cm. Să se găsiască cealaltă catetă.

27. Intr'un triunghiu dreptunghiu, ipotenuza este de 595m, o catetă de 91m. Să se găsiască cealaltă catetă.

28. Un triunghiu dreptunghiu are catetele de 21cm și 28cm. Să se calculeze: *1°*. Ipotenuza; *2°*. Laturile unui triunghiu asemenea cu acesta, care are cea mai mică latură de 108cm; *3°*. să se verifice că triunghiul obținut este dreptunghiu.

29. Diagonalele unui romb sunt de 70cm și 168cm. Să se calculeze: *1°*. Latura rombului; *2°*. Raza cercului înscris în romb.

30. Un triunghiu dreptunghiu are ipotenuza de 85cm și o catetă de 51cm. Să i se calculeze cealaltă catetă și laturile unui triunghiu asemenea cu el, având latura cea mai mare egală cu 95cm.

31. Cele două catete ale unui triunghiu dreptunghiu sunt de 171cm și 228cm. Să i se calculeze ipotenuza.

Pe această ipotenuză se construește un triunghiu echilateral. Să i se calculeze înălțimea.

32. Cele două catete ale unui triunghiu dreptunghiu sunt de 207cm și 276cm. Să se calculeze ipotenuza. Pe această ipotenuză ca latură se construește un patrat. Să i se calculeze diagonala.

33. Intr'un triunghiu dreptunghiu o catetă este $\frac{3}{4}$ din cealaltă iar ipotenuza este de 45cm. Să se calculeze cele două catete.

34. Intr'un triunghiu dreptunghiu, o catetă și înălțimea corespunătoare ipotenuzei sunt proporționale cu numerele 85 și 77; iar suma lor este de 5832mm. Să se găsiască aceste segmente și laturile triunghiului dreptunghiu.

35. Intr'un triunghiu dreptunghiu, proiecția unei catete pe ipotenuză și înălțimea corespunzătoare ipotenuzei sunt proporționale cu numerele 60, 91; iar suma lor este de 9060cm. Să se găsească aceste segmente și laturile triunghiului dreptunghiu.

36. Intr'un triunghiu dreptunghiu, o catetă este de 15cm. și proiecția ei pe ipotenuză de 9cm. Să se calculeze: *1°*. Ipotenuza; *2°*. Cealaltă catetă; *3°*. Aria triunghiului echilateral înscris în acelaș cerc ca triunghiul dreptunghiu.

37. Intr'un triunghiu dreptunghiu, ipotenuza este de 75cm și proiecția unei catete pe ipotenuză este de 27cm. Să se calculeze cele două catete și aria exagonului regulat înscris în acelaș cerc ca triunghiul dreptunghiu.

38. Aria unui triunghiu echilateral este de $243 \times \sqrt{3}$ cm^2. Să i se găsiască înălțimea.

39. Un punct M este situat pe o tangentă la un cerc cu raza de 147mm. la distanța de 196mm de punctul de contact. Să se calculeze: *1°*. Distanța lui de centrul cercului O; *2°*. Raza cercului circumscris triunghiului echilateral ce are pe OM ca latură.

40. Cele două catete ale unui triunghiu dreptunghiu sunt de 63cm și 216 cm. Pe ipotenuza ca latură se construește un triunghiu echilateral. Să i se calculeze aria. Să se calculeze latura exagonului regulat și a patratului, înscrise în acelaș cerc ca triunghiul echilateral.

41. Cele două catete ale unui triunghiu dreptunghiu sunt de 99cm și 168cm. Pe ipotenuza ca latură se construește un exagon regulat. Să i se calculeze aria. Să se calculeze latura triunghiului echilateral și a patratului, înscrise în acelaș cerc ca exagonul regulat.

42. Dintr'un punct M situat la o distanță de 245mm de centrul unui cerc cu raza de 147mm se duce o tangentă MT la cerc. Să se calculeze lungimea acestei tangente. Să se calculeze raza cercului în care MT ar fi apotema exagonului regulat înscris.

43. Un triunghiu dreptunghiu are catetele de 65cm și 156cm. să se calculeze apotema exagonului regulat înscris în acelaș cerc ca triunghiul dreptunghiu.

44. Un triunghiu dreptunghiu are catetele de 55cm și 132cm. Să se calculeze apotema triunghiului echilateral înscris în acelaș cerc ca triunghiul dreptunghiu.

45. Un punct M este la distanța de 60cm de centrul O al unui cerc; iar tangenta din acel punct la cerc are o lungime de 48cm. Să se calculeze: *1°*. Raza cercului; *2°*. Aria exagonului regulat înscris în cerc; *3°*. Lungimea coardei duse din punctul de tangență perpendiculară pe MO.

46. Intr'un cerc o coardă este de 45cm, iar distanța unei extremități a ei de diametrul ce trece prin cealaltă extremitate este de 36cm. Să se calculeze: 1°. Raza cercului; 2°. Coarda corespunzătoare arcului suplimentar arcului subîntins de prima coardă; 3°. Raza cercului circumscris triunghiului echilateral, ce are această coardă ca latură.

47. Un triunghiu dreptunghiu are ipotenuza de 593cm și o catetă de 368cm. Să se afle 1°. Cealaltă catetă. Un triunghiu echilateral este echivalent cu triunghiul dreptunghiu. Să se găsiască: 2°. Latura triunghiului echilateral; 3°. Raza cercului circumscris triunghiului echilateral; 4°. Raza cercului înscris în triunghiul echilateral.

48. Un triunghiu dreptunghiu are ipotenuza de 673cm și o catetă de 552cm. Să se afle cealaltă catetă. Un exagon regulat este echivalent cu triunghiul dreptunghiu. Să se găsească: 1°. Latura exagonului; 2°. Raza cercului înscris în exagon.

49. Un triunghiu dreptunghiu are catetele de 817 cm și 744cm. Să se calculeze: 1°. Ipotenuza; 2°. Aria patratului înscris în același cerc ca triunghiul; 3°. Latura triunghiului echilateral echivalent cu patratul; 4°. Latura exagonului regulat echivalent cu triunghiul echilateral.

50. Intr'un cerc O de diametru AB=395cm.; se dă coarda AC=316cm. Să se calculeze coarda CB. Pe CB ca latură se construește un patrat. Să se calculeze: 1°. Latura triunghiului echilateral înscris în același cerc cu patratul; 2°. Latura exagonului regulat echivalent cu triunghiul echilateral.

51. Intr'un cerc O se dă diametrul AB=435cm și coarda AC=261cm. Să se calculeze: 1°. Coarda CB. Pe CB ca latură se construește un triunghiu echilateral. Să se calculeze: 2°. latura patratului înscris în același

cerc ca triunghiul echilateral; 3°. latura exagonului regulat echivalent cu patratul.

52. Un triunghiu dreptunghiu are catetele de 273cm şi 136cm. Să se afle: 1°. Ipotenuza; 2°. Raza cercului circumscris triunghiului dreptunghiu; 3°. aria exagonului regulat circumscris acestui cerc.

53. Un triunghiu dreptunghiu are catetele de 325cm şi 228cm. Să se afle: 1°. Ipotenuza; 2°. Raza cercului circumscris triunghiului dreptunghiu; 3°. Aria triunghiului echilateral circumscris acestui cerc.

54. Catetele unui triunghiu dreptunghiu sunt proporţionale cu numerele 20, 21, suma lor fiind 656dm. Să se găsiască: 1°. Ipotenuza triunghiului dreptunghiu; 2°. Aria exagonului regulat ce are ca latură proiecţia catetei mici pe ipotenuză; 3°. Aria triunghiului echilateral ce are ca latură raza cercului înscris în exagon.

(*Răspuns*: 1° 464 *dm*)

55. Ariile unui triunghiu echilateral şi a unui exagon regulat sunt proporţionale cu numerele 147 şi 800, suma lor fiind $2841 \times \sqrt{3}$dm^2. Să se găsiască: 1°. Ariile acestor poligoane; 2°. Laturile lor; 3°. Ipotenuza triunghiului dreptunghiului, ce are catetele egale cu laturile acestor poligoane.

Răspuns: $l_3 = 42dm$, $l_6 = 40dm$, $ip = 58dm$).

56. Aria unui sector de 45° este egală cu $2 \times \pi dm^2$. Să se afle: 1°. Raza cercului din care face parte sectorul; 2°. Latura triunghiului echilateral echivalent cu exagonul regulat înscris în cercul din care face parte sectorul.

(*Răspuns*: 1°. 4 *dm*)

57. Un triunghiu dreptunghiu are catetele egale cu 237cm şi 316cm. Să se găsiască: 1°. Ipotenuza; 2°. Raza

cercului circumscris triunghiului dreptunghiu; *3°*. Aria mărginită de ipotenuză, de latura triunghiului echilateral înscris în acelaş cerc, plecând din unul din vârfurile unghiurilor ascuţite ale triunghiului dreptunghiu în afară de el, şi de arcul cuprins între aceste două drepte.

(*Răspuns*: *1°. 395cm*)

58. Un triunghiu dreptunghiu are catetele de 261cm şi 348cm. Să se găsiască: *1°*. Ipotenuza; *2°*. Raza cercului circumscris triunghiului dreptunghiu; *3°*. Aria mărginită de ipotenuză, de latura exagonului regulat înscris în acelaş cerc, plecând din unul din vârfurile unghiurilor ascuţite ale triunghiului dreptunghiu în exteriorul triunghiului şi de arcul cuprins între aceste două drepte.

(*Răspuns*: *1°. 453cm*)

59. Ariile unui triunghiu dreptunghiu şi a unui triunghiu echilateral sunt proporţionale cu numerele 15 şi $22\times\sqrt{3}$. Să se calculeze: *1°*. Aria triunghiului echilateral, ştiind că triunghiul dreptunghiu are ipotenuza de 73cm şi o catetă de 55cm; *2°*. Latura triunghiului echilateral; se consideră cercul înscris în triunghiul echilateral şi în acest cerc o coardă egală cu latura exagonului regulat înscris. Să se găsiască aria segmentului circular, mărginit de această coardă şi de arcul mai mic ca un semicerc subîntins de această coardă.

(*Răspuns*: *Cateta=48cm*, L_3*=88cm*).

60. Un triunghiu echilateral este echivalent cu un triunghiu dreptunghiu, care are ipotenuza de 145cm şi o catetă de 116cm. Se consideră cercul circumscris triunghiului echilateral şi patratul înscris în acelaş cerc, având un vârf comun cu triunghiul. Să se calculeze: *1°*. Aria triunghiului echilateral; *2°*. Latura lui; *3°*. Lun-

gimea arcului cuprins între extremitățile laturilor celor două poligoane, care pleacă din acelaș punct.

(*Răspuns* : *1°. 15138 cm²*)

61. Un exagon regulat este echivalent cu un triunghiu dreptunghiu, care are ipotenuza de 185cm și o catetă de 111cm; se consideră cercul circumscris exagonului și patratul înscris în acelaș cerc, având un vârf comun cu exagonul. Să se afle : *1°*. Aria exagonului; *2°*. Latura lui; *3°*. Lungimea arcului cuprins între extremitățile laturilor celor două poligoane, care pleacă din acelaș punct.

(*Răspuns* : *1°. 8214 cm²*)

62. Un triunghiu echilateral este echivalent cu un triunghiu dreptunghiu, care are ipotenuza de 679cm și o catetă de 504cm. Se consideră cercul înscris în triunghiul echilateral .Să se afle : *1°*. Aria triunghiului echilateral; *2°*. Raza cercului înscris; *3°*. aria segmentului circular mărginit de coarda care unește două puncte de contact consecutive și de arcul mai mic decât un semicerc subîntins de coardă.

(*Răspuns* : *1°. 114660 cm²*)

63. Un exagon regulat este echivalent cu un triunghiu dreptunghiu care are ipotenuza de 471cm și o catetă de 255cm. Se consideră cercul înscris în exagon și în acest cerc două coarde, una care unește două puncte de contact consecutive și alta paralelă cu ea și egală cu latura triunghiului echilateral înscris, de aceiaș parte a centrului. Să se afle : *1°* Aria exagonului regulat; *2°*. Raza cercului înscris; *3°*. Aria figurii mărginită de cele două coarde și de arcele cuprinse între ele.

(*Răspuns* : *1°. 50490 cm²*)

CLASA A IV-a.

A L G E B R Ă.

Probleme rezolvate.

1. *Să se rezolve ecuația și să se verifice rădăcina.*

$$\frac{(6x^2-x+8)(x-2)}{234}-\frac{(x^2-2x+3)(4x-5)}{156}+\frac{x+2}{104}-\frac{3x^2-2}{117}-x=\frac{5}{78}-\frac{57x}{52}.$$

Se efectuează operațiile dela numărători.

$$\frac{6x^3-x^2+8x-12x^2+2x-16}{234}-\frac{4x^3-8x^2+12x-5x^2+10x-15}{156}+\frac{x+2}{104}-\frac{3x^2-2}{117}-x=\frac{5}{78}-\frac{57x}{52}.$$

Se reduc termenii asemenea în produsele obținute:

$$\frac{6x^3-13x^2+\overset{4}{10}x-16}{234}-\frac{4x^3-13x^2+\overset{6}{22}x-15}{156}+\frac{\overset{9}{x}+2}{104}-\frac{3x^2-\overset{8}{2}}{117}-\overset{936}{x}=\frac{\overset{12}{5}}{78}-\frac{\overset{18}{57x}}{5}.$$

Se elimină numitorii amplificând ecuația cu *C.m.m.mc.*. al numitorilor :

$234 = 2 \times 3^2 \times 13$

$156 = 2^2 \times 3 \times 13$

$104 = 2^3 \times 13$

$117 = 3^2 \times 13$

$78 = 2 \times 3 \times 13$

$52 = 2^2 \times 13$

$C.m.m.m.c. = 2^3 \times 3^2 \times 13 = 234 \times 4 = 936$

234	2
117	3^2
13	13
1	

156	2^2
39	3
13	13
1	

104	2^3
26	2
13	13
1	

117	3^2
13	13
1	

$$\begin{array}{r} 57\times \\ 18 \\ \hline 456 \\ 57 \\ \hline 1026 \end{array}$$

$$24x^3 - 52x^2 + 40x - 64 - 24x^3 + 78^2x - 132x + 90 +$$
$$+ 9x + 18 - 24x^2 + 16 - 936x = 60 - 1026x.$$

Se reduc termenii asemenia : Termenii în x^3 se reduc, termenii liberi de x se reduc la zero.

$$2x^2 + 1075x - 1068x = 0 \quad \text{sau}$$
$$2x^2 + 7x = 0$$
$$x(2x + 7) = 0$$

Pentru ca un produs de 2 factori să se anuleze este necesar ca unul din factori să se anuleze adică, sau :

$1^0.\ x = 0$ sau $2x + 7 = 0$ adică $2^0.\ x = -\frac{7}{2}$

Verificare : $1^0.\ x = 0$ *Expresiunea* :

$\frac{-16}{234} - \frac{-15}{156} + \frac{2}{104} - \frac{-2}{117}$ trebue să fie egală cu $\frac{5}{78}$

In adevăr, simplificând și făcând operațiile :

$$\frac{-8}{117}+\frac{5}{52}+\frac{1}{52}+\frac{2}{117}=-\overset{3}{\overbrace{\frac{6}{117}}}+\overset{2}{\overbrace{\frac{6}{52}}}=-\overset{2}{\overbrace{\frac{2}{39}}}+\overset{3}{\overbrace{\frac{3}{26}}}=$$

$$=\frac{-4+9}{78}=\frac{5}{78}$$

$2^0.\ x=-\frac{7}{2}$

$$\frac{\left(6\times\frac{49}{4}+\frac{7}{2}+8\right)\left(-\frac{7}{2}-2\right)}{234}-\frac{\left(\frac{49}{4}+7+3\right)\left(-14-5\right)}{156}+$$

$$+\frac{-\frac{7}{2}+2}{104}\cdot\frac{3\times\frac{49}{4}-2}{117}+\frac{7}{2}\text{ comparat cu }\frac{5}{78}-\frac{-57\times\frac{7}{2}}{52}$$

adică :

$$-\frac{\left(\frac{147}{2}+\frac{7}{2}+8\right)\times\frac{11}{2}}{234}-\frac{\frac{-89}{4}\times 19}{156}-\frac{\frac{3}{2}}{104}\cdot\frac{\frac{147}{4}-2}{117}+$$

$$+\frac{7}{2}\text{ comparat cu }\overset{4}{\overbrace{\frac{5}{78}}}+\overset{3}{\overbrace{\frac{399}{104}}}\quad\text{adică :}$$

$$\frac{-85\times 11}{468}+\frac{1691}{624}-\frac{3}{208}-\frac{139}{468}+\frac{7}{2}$$

$$\begin{array}{r} 89\times \\ 19 \\ \hline 801 \\ 89 \\ \hline 1691 \end{array}\qquad\begin{array}{r} 85\times \\ 11 \\ \hline 85 \\ 85 \\ \hline 935 \end{array}$$

comparat cu $\frac{20+1197}{312}$ sau

$$-\overset{4}{\overbrace{\frac{935}{468}}}+\overset{3}{\overbrace{\frac{1691}{624}}}-\overset{9}{\overbrace{\frac{3}{208}}}-\overset{4}{\overbrace{\frac{139}{468}}}+\overset{936}{\overbrace{\frac{7}{2}}}\text{ comparat cu }\frac{1217}{312}$$

$468=2^2\times 3^2\times 13$ $\qquad 208=2\times 104=2^4\times 13$

$624=156\times 4=2^4\times 3\times 13 \qquad 2=2$

$C.\ m.\ m.\ m.\ c.=2^4\times 3^2\times 13=936\times 2=1872$

$$\frac{-3740+5073-27-556+6552}{1872}=\frac{-4323+11625}{1872}=$$

$$=\frac{\overset{6}{\smile}}{\frac{7302}{1872}}=\frac{1217}{312}$$

adică tocmai valoarea membrului al doilea.

*

2. *Să se rezolve sistemul*:

$$\begin{cases} 756x+1375y=27 \\ -324x+1925y=89 \end{cases}$$

Rezolv mai întâi prin *metoda reducerii*, cea mai des întrebuințată. Elimin pe x, aducându-l la același coeficient cu ajutorul celui mai mic multiplu comun al coeficienților lui x

$$\begin{array}{c|c} 7 & 3 \\ 5 & 7 \end{array}\quad\begin{cases} 756x+1375y=27 \\ -324x+1925y=89 \end{cases}$$

$756=2^2\times3^3\times7$

$324=2^2\times3^4$

$C.m.m.m.C=2^2\times3^4\times7=576\times3=2268$

$$\begin{cases} 2268x+4125y=81 \\ -2268x+13475y=623 \end{cases}$$

756	2^2	324	2^2
189	3^2	81	3^4
21	3	1	
7	7		

Adun ecuațiile membru cu membru pentru a elimina pe x.

$17600y=704$

$$y=\frac{\overset{4}{\smile}}{\frac{704}{17600}}=\frac{176\times4}{176\times100}=\frac{\overset{4}{\smile}}{\frac{4}{100}}=\frac{1}{25}$$

Elimin pe y aducându-l la același coeficient în ambele ecuații cu ajutorul *c.m.m.m.c.* al coeficienților lui y.

$1375=5^3\times11$

$1925=5^2\times7\times11$

$C.m.m.m.c=5^3\times7\times11=1925\times5=9625$

$$\begin{cases} 5292x+9625y=189 \\ +1620x+9625y=445 \end{cases}$$

1375	5	1925	5
275	5	385	5
55	5	77	7
11	11	11	11
1		1	

Scad ecuațiile membru cu membru, pentru a elimina pe y, anume scad ecuația a II-a din I-a.

$$6912x = -256$$

$$x = -\frac{\overset{4}{\smile}}{6912} = -\frac{\overset{4}{\smile}}{1728} = -\frac{\overset{4}{\smile}}{432} = -\frac{\overset{4}{\smile}}{108} = -\frac{1}{27}$$

Rezolv sistemul prin *metoda substituției.*

Trag valoarea lui x din I-a ecuație *în funcție de* y și o înlocuesc în ecuația a II-a.

$$756x = 27 - 1375y$$

$$I)\quad x = \frac{27 - 1375}{756}$$

$$-\overset{9}{\smile}324 \times \frac{27 - 1375y}{756} + 1925y = 89 \quad \text{Simplific fracția :}$$

$$\frac{-\overset{12}{\smile}36\,(27 - 1375y)}{84} + 1925y = 89$$

$$\frac{-3\,(27 - 1375y)}{7} + 1925y = 89$$

Efectuez înmulțirea și elimin numitorul :

$$-81 + \dot{4}125y + \dot{1}3475y = 625$$

$$17600y = 704$$

$$y = \frac{704}{17600} = \frac{1}{25}$$ făcând aceleași simplificări ca în metoda precedentă.

Valoarea astfel găsită o înlocuesc în valoarea *I)* trasă pentru x :

$$x = \frac{27 - \frac{\overset{5}{\smile}275}{5}}{756} = \frac{27 - 55}{756} = \frac{\overset{7}{\smile}28}{756} = \frac{\overset{4}{\smile}4}{108} = -\frac{1}{27}$$

3. *Să se rezolve sistemul :*

$$\begin{cases} \dfrac{5x}{144}+\dfrac{4}{15}-\dfrac{3x-2y}{45}-\dfrac{2x+y}{32}+\dfrac{11}{16}=-\dfrac{y}{225}-10 \\ 170x-127y=5430 \end{cases}$$

Elimin numitorii din prima ecuaţie, amplificând-o cu *c.m.m.mc* al numitorilor din acea ecuaţie :

$$\begin{cases} \dfrac{\overbrace{5x}^{50}}{144}+\dfrac{\overbrace{4}^{480}}{15}-\dfrac{\overbrace{3x-2y}^{160}}{45}-\dfrac{\overbrace{2x+y}^{225}}{32}+\dfrac{\overbrace{11}^{450}}{16}=-\dfrac{\overbrace{y}^{32}}{225}-\overbrace{10}^{7200} \\ 170x-127y=5430 \end{cases}$$

$144 = 2^4 \times 3^2$

$15 = 3 \times 5$

$45 = 3^2 \times 5$

$32 = 2^5$

$16 = 2^4$

$225 = 3^2 \times 5^2$

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2^2 \\ 36 & 2^2 \times 3^2 \\ 1 & \\ 225 & 3^2 \\ 25 & 5^2 \\ 1 & \end{array}$$

$C.m.m.m.C = 2^5 \times 3^2 \times 5^2 = (2^2 \times 5^2) \times 2^3 \times 3^2 = 7200$

$$\begin{cases} 250x+\dot{1}\dot{9}\dot{2}\dot{0}y-480x+320y-450x-225y+ \\ +\dot{4}\dot{9}\dot{5}\dot{0}=-32y-\dot{7}\dot{2}\dot{0}\dot{0}\dot{0} \\ 170x-127y=5430 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -680x+127y=-78870 \\ 170x-127y=5430 \end{cases}$$

Elimin pe y adunând ecuaţiile (*metoda reducerii*)

$+510x = +73440$

$$x=\frac{\overbrace{7344\cancel{0}}^{3}}{51\cancel{0}}=\frac{2448}{17}=144$$

$$\begin{array}{r} 2448 : 17 = 144 \\ \hline 74 \\ \hline 68 \\ \hline 0 \end{array}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pe y îl aflu prin *metoda substituției*, înlocuind valoarea găsită pentru x în ecuația cu coeficienți mai mici (a II-a)

$$170 \times 144 - 127y = 5430 \qquad 144 \times 17 = 2448 \text{ după împărțirea făcută.}$$

$$-127y = 5430 - 24480$$

$$+127y = +19050$$

$$y = \frac{19050}{127} = 150 \qquad 1905 : 127 = 15$$

$$635$$

$$0$$

4. *In sistemul*:

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{x+2y-3}{45} - \dfrac{2x-3y-4}{135} + \dfrac{22}{675} = 6 - \dfrac{3x-y+3}{75} \\ 91ax + 24by = 328 \end{cases}$$

să se determine valorile parametrilor a, b pentru care sistemul este: *1°. Nedeterminat*; *2°. Incompatibil.*

1°. Pentru ca sistemul să fie nedeterminat, trebue ca ecuațiile să fie identice și acest lucru se întâmplă când coeficienții lui x, lui y și termenul liber de necunoscută din prima ecuație sunt proporționali cu coeficienții corespunzători din ecuația a II-a. Aduc ecuația I la forma cea mai simplă: elimin numitorii,

$$2x - \frac{x+2y-3}{\overbrace{45}^{675}} - \frac{2x-3y-4}{\overbrace{135}^{5}} + \frac{22}{675} = 6 - \frac{3x-y+3}{\overbrace{75}^{9}}$$

$45 = 3^2 \times 5$ $\quad 135 \mid 3^2$ $\quad 675 \mid 3^2$

$135 = 3^3 \times 5$ $\quad 15 \mid 3$ $\quad 75 \mid 3 \times 5^2$

$675 = 3^3 \times 5^2$ $\quad 5 \mid 5$ $\quad 1$

$75 = 3 \times 5^2$ $\quad 1$

$C.m.m.m.c. = 3^3 \times 5^2 = 675.$

$$1350x - 15x - 30y + 45 - 10x + 15y + 20 + 22 =$$

$$= 4050 - 27x + 9y - 27.$$

$1352x - 24y = 3936$, sau simplificată prin 8:

$169x - 3y = 492$

Deci sistemul este:

$$\begin{cases} 169x - 3y = 492 \\ 91ax + 24by = 328 \end{cases}$$

Condiția de nedeterminare este:

$$\frac{\overset{13}{\smile}}{169} = \frac{\overset{3}{\smile}}{-3} = \frac{\overset{4}{\smile}}{492} \quad \text{sau simplificând:}$$

$$\frac{13}{7a} = \frac{-1}{8b} = \frac{\overset{41}{\smile}}{123}$$

$$\frac{13}{7a} = \frac{-1}{8b} = \frac{3}{2} \quad \text{de unde:}$$

$$7a = \frac{13 \times 2}{3}$$

$$a = \frac{13 \times 2}{3 \times 7} = \frac{26}{21}$$

$$8b = -\frac{2}{3}$$

$$b = -\frac{\overset{2}{\smile}}{3 \times 8} = -\frac{1}{12}$$

Deci valorile: $a = \frac{26}{21}$ $b = -\frac{1}{12}$ *fac sistemul nedeterminat.*

2°. Ecuațiile sunt incompatibile dacă, membrii întâi fiind identici, membrii ai doilea sunt diferiți, ceea ce se întâmplă dacă coeficienții lui x și y sunt proporționali în cele două ecuații, raportul de proporționalitate fiind diferit de raportul termenilor liberi de necunoscută.

$$\frac{13}{7a} = \frac{-1}{8b} \neq \frac{3}{2}$$

Adică sistemul este incompatibil pentru orice valori ale parametrilor, a,b care satisfac ecuației $\frac{13}{7a} = \frac{-1}{8b}$, diferite de acelea particulare găsite pentru nedeterminare.

Ecuația se poate pune sub forma :

$$104\,b = -7a \quad \text{sau} \quad \frac{a}{104} = \frac{b}{-7}$$

adică sistemul este incompatibil pentru valorile lui a,b proporționale cu 104 și -7, diferite de $\frac{26}{21}$ și $-\frac{1}{12}$.

5. *O persoană lasă 1500000 lei moștenire ca să se împartă între două fete ale sale, un băiat al său, un spital și un copil orfan. Fetelor le lasă părți egale; partea lăsată spitalului este cu 30000 lei mai mică decât fracțiunea* $\frac{13}{45}$ *din partea lăsată unei fete; copilului orfan îi lasă cu 8000 lei mai mult decât fracțiunea* $\frac{11}{30}$ *din suma lăsată băiatului. Să se afle partea unei fete și partea băiatului, știind că raportul între suma cuvenită unei fete și aceea a băiatului este* $\frac{5}{4}$.

1500000 lei 30000 lei $\frac{13}{45}$ 8000 lei $\frac{11}{30}$ $\frac{5}{4}$

Insemn cu x partea unei fete, cu y partea băiatului. Fiind de determinat două necunoscute, trebuiesc două ecuații. Caut relații între datele problemei și necunoscute, exprimând algebric în legătură cu necunoscutele (în funcție de necunoscute) acele date care depind de necunoscute :

Valorific fracțiunea $\frac{13}{45}$ din partea lăsată unei fete, anume : a 45-a parte din x este $\frac{x}{45}$, iar $\frac{13}{45}$ este de 13 ori

a 45-a parte, adică $\frac{13x}{45}$; Partea lăsată spitalului, este reprezentată prin expresia algebrică : $\frac{13x}{45} - 30000$. Valorific fracțiunea $\frac{11}{30}$ din suma lăsată băiatului : a 30-a parte din y este $\frac{y}{30}$; $\frac{11}{30}$ din sumă este de 11 ori a 30-a parte, adică $\frac{11y}{30}$: Partea lăsată copilului orfan, este : $\frac{11y}{30} + 8000$.

Caut o relațiune sub formă de egalitate între cantitățile acestea prezentate sub formă de expresiuni algebrice, anume : Suma părților lăsate : fetelor, băiatului, spitalului și copilului orfan este egală cu moștenirea totală :

$$2x + y + \frac{13x}{45} - 30000 + \frac{11y}{30} + 8000 = 1500000$$

A doua ecuație se obține din a doua ideie principală din problemă :

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{4}.$$

Astfel problema este pusă în ecuații.

Rezolv sistemul :

$$\begin{cases} \overset{90}{\overbrace{2x}} + \overset{90}{\overbrace{y}} + \overset{2}{\overbrace{\frac{13x}{45}}} - \overset{90}{\overbrace{30000}} + \overset{3}{\overbrace{\frac{11y}{30}}} + \overset{90}{\overbrace{8000}} = \overset{90}{\overbrace{1500000}} \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Elimin numitorii în prima ecuație:

$45 = 3^2 \times 5$

$30 = 2 \times 3 \times 5$

$C.m.m.m.c. = 2 \times 3^2 \times 5 = 90.$

$$\begin{cases} 180x + 90y + 26x - 2700000 + 33y + \\ + 720000 = 135000000. \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

137700000
720000
136980000

$$\begin{cases} 206x + 123y = 136980000 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Intrebuințez *metoda substituției de oarece a doua ecuație este o proporție*: Trag valoarea lui x din proporție.

$x = \dfrac{5y}{4}$ pe care o substitui în prima ecuație.

$$206 \times \frac{5y}{4} + 123y = 136980000$$

$$1030y + 492y = 547920000$$

$$1522y = 547920000$$

$$273960000 : 761 = 360000$$

$$\begin{array}{r} 4566 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$y = \frac{547920000}{1522} \overset{2}{=} \frac{273960000}{761} = 360000$$

$$x = \frac{5 \times 360000}{4} \overset{4}{=} 5 \times 90000 = 450000$$

*

6. *Trei copii, A, B, C, se iau la întrecere la alergat. Cel care ajunge întâiu ia premiul I, cel care ajunge al doilea, premiul II, plătite de cel care ajunge ultimul. Ei se învoiesc ca după prima alergare, premiul I să primească* $\frac{5}{8}$ *din suma ce posedă, premiul II-lea* $\frac{4}{9}$

din suma ce posedă: la sfârșitul alergării a două, premiul întâiu primește $\frac{7}{13}$ *din suma ce posedă, premiul al II-lea* $\frac{1}{3}$ *din suma ce posedă; în alergarea a treia, premiul I primește* $\frac{9}{10}$ *din ceea ce posedă, premiul al II-lea* $\frac{2}{5}$ *din ceea ce posedă. In prima alergare au ajuns în ordinea B, C, A; în a doua, C, A, B; în a treia A, B, C. La sfârșit A are 38 lei, B 35 lei, C 72 lei. Ce sumă a avut fiecare la început?*

No. alergării	Premiul I		Premiul II		Persoana ce plătește
	Pers.	Sumă	Pers.	Sumă	
I	B	$\frac{5}{8}$	C	$\frac{1}{9}$	A
II	C	$\frac{7}{13}$	A	$\frac{1}{3}$	B
III	A	$\frac{9}{10}$	B	$\frac{2}{5}$	C

Insemn cu x, y, z sumele ce aveau A, B, C la început respectiv. Fiind trei necunoscute, trebuesc 3 ecuații pentru a le determina. Caut să pun sub formă de expresie algebrică suma pe care o avea fiecare la sfârșitul fiecărei alergări.

Egalând expresiile ce reprezintă sumele avute de A, B, C la sfârșitul alergării a treia cu 38, 35, 72 lei, se obțin cele 3 ecuații necesare.

$\frac{5}{8}$ din suma ce avea B este de 5 ori a 8-a parte din y adică: $\frac{5y}{8}$.

$\frac{4}{9}$ din suma ce avea C este de 4 ori a 9-a parte din z, adică : $\frac{4z}{9}$.

Suma ce avea fiecare după I-a alergare.

A avea $\quad x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}$

B „ $\quad y+\frac{5y}{8}$

C „ $\quad z+\frac{4z}{9}$

$\frac{7}{13}$ din suma ce avea C este de 7 ori a 13-a parte din $\left(z+\frac{4z}{9}\right)$ adică :

$$7\times\frac{z+\frac{4z}{9}}{13}=\frac{7}{13}\left(z+\frac{4z}{9}\right)$$

$\frac{1}{3}$ din suma ce avea A este a treia parte din $\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)$ adică :

$$\frac{x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}}{3}=\frac{1}{3}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)$$

Suma ce avea fiecare după a doua alergare.

A avea : $x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}+\frac{1}{3}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)=$

$$=\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

B avea : $y+\frac{5y}{8}-\frac{7}{13}\left(z+\frac{4z}{9}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)$

C „ : $z+\frac{4z}{9}+\frac{7}{13}\left(z+\frac{4z}{9}\right)=\left(z+\frac{4z}{9}\right)\left(1+\frac{7}{13}\right)=$

$=\frac{20}{13}\left(z+\frac{4z}{9}\right)$

$\frac{9}{10}$ din partea ce avea A înseamnă de 9 ori a zecea parte din suma :

$$\frac{4}{3}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right) \text{ adică :}$$

$$9\times\frac{\frac{4}{3}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)}{10}=\frac{9}{10}\times\frac{4}{3}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)=$$

$$\frac{6}{5}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)$$

$\frac{2}{5}$ din partea ce posedă B înseamnă de 2 ori a 5-a parte din suma :

$$y+\frac{5y}{8}-\frac{7}{13}\left(z+\frac{4z}{9}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right), \text{ adică :}$$

$$2\times\frac{y+\frac{5y}{8}-\frac{7}{13}\left(z+\frac{4z}{9}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)}{5}=$$

$$\frac{2}{5}\left[y+\frac{5y}{8}-\frac{7}{13}\left(z+\frac{4z}{9}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)\right]$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Suma ce posedă fiecare după alergarea a treia:

$$A : \frac{4}{3}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)+\frac{6}{5}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)=$$

$$=\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)\left(\overset{5}{\frac{4}{3}}+\overset{3}{\frac{6}{5}}\right)=\frac{38}{15}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)$$

$$B : y+\frac{5y}{8}-\frac{7}{13}\left(z+\frac{4z}{9}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)+$$

$$+\frac{2}{5}\left[y+\frac{5y}{8}-\frac{7}{13}\left(z+\frac{4z}{9}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)\right]$$

$$C : \frac{20}{13}\left(z+\frac{4z}{9}\right)-\frac{6}{5}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)-$$

$$-\frac{2}{5}\left[y+\frac{5y}{8}-\frac{7}{13}\left(z+\frac{4z}{9}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)\right]$$

de unde rezultă ecuațiile:

$$\begin{cases}\frac{38}{15}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)=38\\ \frac{7}{5}\left(y+\frac{5y}{8}-\frac{7z}{13}-\frac{28z}{117}-\frac{x}{3}+\frac{5y}{24}+\frac{4z}{27}\right)=35\\ \frac{20}{13}\left(z+\frac{4z}{9}\right)-\frac{6}{5}\left(x-\frac{5y}{8}-\frac{4z}{9}\right)-\\ \quad-\frac{2}{5}\left(y+\frac{5y}{8}-\frac{7z}{13}-\frac{28z}{117}-\frac{x}{3}+\frac{5y}{24}+\frac{4z}{27}\right)=72.\end{cases}$$

Simplificând prima ecuație cu 38, a doua cu 7 și amplificându-le respectiv cu 15, 5, avem

$$\begin{cases} \overset{72}{\overbrace{x}} - \overset{9}{\overbrace{\frac{5y}{8}}} - \overset{8}{\overbrace{\frac{4z}{9}}} = \overset{72}{\overbrace{15}} \\ \overset{2808}{\overbrace{y}} + \overset{351}{\overbrace{\frac{5y}{8}}} - \overset{216}{\overbrace{\frac{7z}{13}}} - \overset{24}{\overbrace{\frac{28z}{117}}} - \overset{936}{\overbrace{\frac{x}{3}}} + \overset{117}{\overbrace{\frac{5y}{24}}} + \overset{104}{\overbrace{\frac{4z}{27}}} = \overset{2808}{\overbrace{25}} \\ \overset{540}{\overbrace{\frac{20z}{13}}} + \overset{60}{\overbrace{\frac{80z}{117}}} - \overset{1404}{\overbrace{\frac{6x}{5}}} + \overset{1755}{\overbrace{\frac{3y}{4}}} + \overset{468}{\overbrace{\frac{8z}{15}}} - \overset{1404}{\overbrace{\frac{2y}{5}}} - \overset{1755}{\overbrace{\frac{y}{4}}} + \overset{108}{\overbrace{\frac{14z}{65}}} + \\ + \overset{12}{\overbrace{\frac{56z}{585}}} + \overset{468}{\overbrace{\frac{2x}{15}}} - \overset{585}{\overbrace{\frac{y}{12}}} - \overset{52}{\overbrace{\frac{8z}{135}}} = \overset{7020}{\overbrace{72}}. \end{cases}$$

Elimin numitorii în prima ecuație :

$$72x - 45y - 32z = 1080$$

72	28
15	24
360	112
72	56
1080	672

Elimin numitorii în ecuația a II-a :

$8 = 2^3$, $13 = 13$, $117 = 3^2 \times 13$, $24 = 2^3 \times 3$, $27 = 3^3$

$C.m.m.m.c = 2^3 \times 3^3 \times 13 = 117 \times 8 \times 3 =$

$= 936 \times 3 = 2808$

$$\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{2808y} + \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{1755y} - 1512z - 672z - \overset{\cdot\cdot\cdot}{936x} + \overset{\cdot\cdot\cdot}{585y} + 416z = 70200$$

2808	
25	
14040	
5616	
70200	

585	3^2	135	3^2
65	5	15	3
13	13	5	5
1		1	

Elimin numitorii în ecuația a treia :

$13=13,\ 117=3^2\times 13,\ 5=5,\ 4=2^2,\ 15=3\times 5,$
$65=5\times 13,\ 585=3^2\times 5\times 13$

$15=3\times 5,\ 12=2^2\times 3,\ 135=3^3\times 5$

$C.m.m.m.c.=2^2\times 3^3\times 5\times 13=585\times 3\times 4=$
$2340\times 3=7020$

$$10800z+4800z-8424x+5265y+$$
$$+3744z-2808y-1755y+1512z+$$
$$+672z+936x-585y-416z=505440$$

Reducând termenii asemenea :

$$\begin{cases} 72x-45y-32z=1080 \\ -936x+5148y-1768z=70200 \\ -7488x+117y+21112z=505440 \end{cases}$$

Simplific ecuația a II-a cu 4, a III-a cu 13.

$7488:13=576$ $\quad 21112:13=1624$ $\quad 505440:13=38880$

$$\begin{cases} 143 \\ 5 \\ 5 \end{cases} \begin{cases} 72x-45y-32z=1080 \\ -234x+1287y-442z=17550 \\ -576x+9y+1624z=38880 \end{cases}$$

Elimin pe y între primele două ecuații (*metoda reducerii*)

$45 = 3^2 \times 5$

$1287 = 3^2 \times 11 \times 13$

$C.m.m.m.c. = 3^2 \times 5 \times 11 \times 13 = 1287 \times 5 = 6435$

1287	3²	143
143	11	32
13	13	286
	1	429
		4576

$$\begin{cases} 10296x - 6435y - 4576z = 154440 \\ -1170x + 6435y - 2210z = 87750 \end{cases}$$

$$9126x - 6786z = 242190$$

143 × 72	143 × 108
286	1144
1001	143
10296	15444

Simplific ecuația prin 9 : $1014x - 754z = 26910$ prin 2

$507x - 377z = 13455$ prin 13

$39x - 29z = 1035$

$507 : 13 = 39$ (117, 0)

$377 : 13 = 29$ (117, 0)

$13455 : 13 = 1035$ (45, 65, 0)

Elimin tot pe y între prima și a treia ecuație, amplificând cu 3 pe a treia.

$$\begin{cases} 72x - 45y - 32z = 1080 \\ -2880x + 45y + 8120z = 194400 \end{cases}$$

$-2808x + 8088z = 195480$ Se simplifică prin 8

$-351x + 1011z = 24435$ Se simplifică prin 3

$-117x + 337z = 8145$

Deci sistemul s'a redus la :

$$3 \begin{cases} 39x - 29z = 1035 \\ -117x + 337z = 8145 \end{cases}$$

x se elimină numai decât amplificând prima ecuație cu 3

$$\begin{cases} 117x - 87z = 3105 \\ -117x + 337z = 8145 \end{cases}$$

$$250z = 11250$$

$$z = \frac{\overset{5}{\smile}{11250}}{250} = \frac{225}{5} = 45 \text{ lei}$$

$45 \times$
29
405
90
1305

Trag valoarea lui x din prima ecuație

$$x = \frac{1035 + 29 \times 45}{39} = \frac{1035 + 1305}{39} = \frac{\overset{3}{\smile}{2340}}{39} = \frac{\overset{13}{\smile}{780}}{13} = 60 \text{ lei}$$

Valorile aflate pentru x, z le înlocuiesc în cea mai simplă ecuație (I).

$$45y = 72 \times 60 - 32 \times 45 - 1080$$

$$y = \frac{9 \times 5\,(96 - 32 - 24)}{45} = 40 \text{ lei.}$$

Verificare :

La început :	După I-a alergare	După a II-a alergare
A : 60 lei	60—25—20=15 lei	15+ 5=20 lei
B : 40 lei	40+25=65 lei	65— 5—35=25 lei
C : 45 lei	45+20=65 lei	65+35=100 lei

După a III-a alergare

$$20 + 18 = 38 \text{ lei}$$
$$25 + 10 = 35 \text{ lei}$$
$$100 - 18 - 10 = 72 \text{ lei}$$

7. *O persoană primește o moștenire. O parte o pune la dobândă cu 8% pe an; iar pe cea rămasă o întrebuin-*

țează în felul următor: cumpără o casă, care valorează $\frac{7}{15}$ *din toată moștenirea; face o călătorie, cheltuind o sumă egală cu fracțiunea* $\frac{3}{16}$ *din prețul casei; cumpără cărți dintr'o sumă egală cu* $\frac{1}{9}$ *din rest. Aceste cheltueli întrec cu 25000 lei fracțiunea* $\frac{7}{8}$ *din partea nedepusă la dobândă. Să se afle suma moștenită și partea depusă la dobândă dacă această sumă depusă, mărită cu dobânda sa pe 3 ani, întrece cu 96000 lei* $\frac{1}{3}$ *din moștenire.*

Insemn cu x suma moștenită, cu y partea depusă la dobândă. Caut să exprim în funcțiune de necunoscute diferite cantități, care intervin în problemă și depind de necunoscute.

Partea nedepusă la dobândă $x - y$

Prețul casei : $\frac{7}{15}$ din x înseamnă de 7 ori a 15-*a* parte din x adică :

$$7 \times \frac{x}{15} = \frac{7x}{15}$$

Suma cheltuită în călătorie : $\frac{3}{16}$ din $\frac{7x}{15}$ înseamnă de 3 ori a 16-a parte din $\frac{7x}{15}$ adică :

$$3 \times \frac{\frac{7x}{15}}{16} = \frac{\overset{3}{\cancel{3}}}{16} \times \frac{7x}{15} = \frac{7x}{80}$$

Restul din partea destinată cheltuelilor, după ce a făcut aceste cheltueli:

$$x-y-\frac{7x}{15}-\frac{7x}{80}$$

Sumă cheltuită pentru cărți:

$$\frac{4}{9}\text{ din }\left(x-y-\frac{7x}{15}-\frac{7x}{80}\right)$$

înseamnă de 4 ori a 9-*a* parte din acel rest:

$$4\times\frac{x-y-\frac{7x}{35}-\frac{7x}{80}}{9}=\frac{4}{9}\left(x-y-\frac{7x}{15}-\frac{7x}{80}\right)$$

Fracțiunea $\frac{7}{8}$ din $x-y$ este $7\times\frac{x-y}{8}=\frac{7(x-y)}{8}$

Caut o relație între aceste expresiuni:

$$\frac{7x}{15}+\frac{7x}{80}+\frac{4}{9}\left(x-y-\frac{7x}{15}-\frac{7x}{8}\right)>\frac{7(x-y)}{8}$$

Diferența fiind 25000 lei, *prima ecuație este*:

$$\frac{7x}{15}+\frac{7x}{80}+\frac{4}{9}\left(x-y-\frac{7x}{15}-\frac{7x}{80}\right)-\frac{7(x-y)}{8}=25000$$

Fiind două necunoscute, trebuesc 2 ecuații pentru a le determina. A doua ecuație se formează din a doua idee din problemă. Iarăși caut să pun sub formă de expresiuni algebrice în funcție de necunoscute, diferite cantități din problemă.

Dobânda adusă de y în timp de 3 ani cu procent de 8%, calculată după formula dobânzii:

$$D=\frac{C\times P\times T}{100}\text{ este: }\frac{3\times 8y}{100}=\frac{6y}{25}.$$

Capitalul împreună cu dobânda : $y + \frac{6y}{25}$

$\frac{1}{3}$ parte din x : $\frac{x}{3}$

Caut o relație între aceste cantități :

$$y + \frac{6y}{25} > \frac{x}{3}$$

Intrecerea fiind 96000 lei, rezultă ecuația :

$$y + \frac{6y}{25} - \frac{x}{3} = 96000$$

Astfel problema este pusă în ecuații. Rămâne de rezolvit sistemul :

$$\begin{cases} \dfrac{\overbrace{7x}^{144}}{15} + \dfrac{\overbrace{7x}^{27}}{80} + \dfrac{\overbrace{4x}^{240}}{9} - \dfrac{\overbrace{4y}^{240}}{9} - \dfrac{\overbrace{28x}^{16}}{9 \times 15} - \dfrac{\overbrace{7x}^{12}}{9 \times 20} \\ \\ - \dfrac{\overbrace{7x - 7y}^{270}}{8} = \overbrace{25000}^{2160} \\ \\ \overbrace{y}^{75} + \dfrac{\overbrace{6y}^{3}}{25} - \dfrac{\overbrace{x}^{25}}{3} = \overbrace{96000}^{75} \end{cases}$$

Elimin numitorii în prima ecuație, amplificând cu *c.m.m.m.c* al lor :

$15 = 3 \times 5 \quad 80 = 2^4 \times 5 \quad 9 = 3^2$

$9 \times 15 = 3^3 \times 5 \quad 9 \times 20 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \quad 8 = 2^3$

$C.m.m.m.c = 2^4 \times 3^3 \times 5 = 27 \times 80 = 2160$

$16 \times$	216
28	25
128	1080
32	432
448	5400

$1008x + 189x + 960x - 960y - 448x - 84x - 1890x + 1890y = 54000000$

Elimin numitorii în ecuația a 2-a

$C.m.m.mc = 3 \times 25 = 75$

$75y + 18y - 25x = 7200000$

$96 \times$
75
480
672
7200

Reduc termenii asemenia :

$$\begin{cases} 2157x - 2422x + 930y = 54000000 \\ -25x + 93y = 7200000 \end{cases}$$

sau încă :

$$\begin{cases} -265x + 930y = 54000000 \\ -25x + 93y = 7200000 \end{cases}$$

Intrebuințez *metoda reducerii* : Elimin pe y.

$$\begin{cases} -265x + 930y = 54000000 \\ -250x + 930y = 72000000 \end{cases}$$

$$15x = 18000000$$

$$x = \frac{\overset{5}{\smile}}{\frac{18000000}{15}} = \frac{3600000}{3} = 1200000 \text{ lei}$$

Găsesc valoarea lui y *substituind* pe x în ecuația a 2-a.

$$93y = 7200000 + 25 \times 1200000.$$

$$y = \frac{37200000}{93} = 400000$$

25
12
50
25
300

Moștenirea valora 1200000 lei ; partea depusă la dobândă 400.000 lei.

Probleme de rezolvat.

1. Să se efectueze operațiile :

a) $(ax^2-bxy+cy^2)^2-(ax^2+bxy+cy^2)(ax^2+bxy-cy^2)+$
$+(-ax^2+2xy-cy^2)(x^2-bxy+5y^2)-(3x-2y)^3(ax-cy)$.

b) $(bx^2+cxy-ay^2)^2-(bx^2+cxy+ay^2)(bx^2+cxy-ay^2)+$
$+(-3x^2+cxy-5y^2)(bx^2-2xy-cy^2)-(-5x+2y)^3(bx-ay)$.

Să se ordoneze rezultatele după puterile descrescătoare ale literii x și să se calculeze valoarea numerică a rezultatelor pentru

$$x=-\frac{1}{2} \quad y=\frac{1}{3} \quad a=-\frac{3}{2} \quad b=-\frac{2}{3} \quad c=1$$

2. Să se efectueze operațiile :

a) $\left[(-xy^2)^2(-x^2+3xy-2y^2)-3x^2y^3(2x^2+xy-4y^2)\times\right.$
$\times(2x-3y)-2xy(5x^4-3x^3y-x^2y^2+2xy^3-4y^4)\times(-3x^2-$
$\left.-2xy+y^2)\right]\left[(5x^2-2xy-y^2)^2-(3x^2+xy-2y^2)(3x^2-xy+2y^2)\right]$

b) $\left[(-x^2y)^2(-2x^2+3xy-y^2)-3x^2y^2(-4x^2+xy+2y^2)\times\right.$
$\times(-3x+2y)-2xy(-4x^4+2x^3y-x^2y^2-3xy^3+5y^4)\times$
$\left.\times(x^2-2xy-3y^2)\right]\left[(x^2+2xy-5y^2)^2-(-2x^2+xy+3y^2)\times\right.$
$\left.\times(2x^2-xy+3y^2)\right]$

și să se afle valoarea numerică a rezultatelor pentru $x=-1 \quad y=-1$.

3. Să se descompună în factori expresiunile.

a) $x^{16}-1$

b) $17ax^8y^3-17ay^3$

c) $2x^6y^2-16x^4y^4+32x^2y^6$

d) $3a^9bx^6y^3-6a^5b^5x^4y^5+3ab^9x^2y^7$

e) $4x^8-12x^6+12x^4-4x^2$

f) $5x^7y^2-60x^5y^4+240x^3y^6-320xy^8$

4. Să se simplifice fracțiile :

a) $\dfrac{x^8-1}{x^8-2x^4+1}$

b) $\dfrac{9x^3-36x^2+36x}{6x^5-36x^4+72x^3-48x^2}$

c) $\dfrac{2x^6+18x^5+54x^4+54x^3}{10x^6-180x^4+810x^2}$

d) $\dfrac{(81x^6-72x^4+16x^2)(8x-12)(2x^{16}-2)x^3}{(72x^2+96x+32)(8x^5-36x^4+54x^3-27x^2)(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)}$

5. Să se aducă la cea mai simplă expresie fracția :

a) $\dfrac{M^2N^2+2MNP+P^2-Q^2}{(MN+P+Q)^3}$

b) $\dfrac{2MNP-M^2N^2-P^2+Q^2}{(MN-P-Q)^3}$

dacă M, N, P, Q reprezintă polinoamele :

$$M=2x-3y \qquad N=-x+3y \qquad P=3x^2-4xy+5y^2$$
$$Q=x^2-5xy-2y^2$$

6. Să se aducă la cea mai simplă formă fracția :

$$\frac{4M^2N^2-9P^2}{(4M^2N^2+12MNP+9P^2)(2MN-3P)}$$

dacă M, N, P reprezintă polinoamele :

$$M=ax^2-3bxy+2cy^2 \qquad N=-x^2+3xy-y^2$$
$$P=2ax^4-3bx^3y-2cx^2y^2+5bxy^3-3ay^4$$

7. Să se efectueze adunările și scăderile și să se afle valoarea numerică a rezultatelor pentru $x=-1$ $y=-2$.

a) $\dfrac{20x^2+60xy+45y^2}{12x^2-27y^2} \cdot \dfrac{45x^2-125y^2}{27x^2-90xy+75y^2}$

b) $\dfrac{x^2-\frac{5}{3}xy+2y^2}{12x^2+36xy+27y^2} \cdot \dfrac{x^2-\frac{23}{6}xy-2y^2}{24x^2-72xy+54y^2} + \dfrac{x^2-\frac{11}{18}xy-y^2}{8x^2-18y^2}$

c) $\dfrac{75x^2-12y^2}{125x^2-100xy+20y^2} \cdot \dfrac{18x^2+60xy+50y^2}{45x^2-125y^2}$

d) $\dfrac{2x-3}{8x+32} \cdot \dfrac{x-2}{12x-48} \cdot \dfrac{x^2+2x-8}{9x^2+72x+144} +$

$+ \dfrac{3x^2-2x-40}{18x^2-144x+288} \cdot \dfrac{16x^2+25x-6}{72x^2-1152}$

e) $\dfrac{2x^3-y^3}{6x^2y-15xy^2} \cdot \dfrac{x^3-2y^3}{4x^3+10x^2y} \cdot$

$$\frac{32x^7+56x^6y-140x^5y^2-270x^4y^3-327x^3y^4-45x^2y^5-50xy^6+750y^7}{96x^6y-1200x^4y^3+3750x^2y^5}$$

f) $\dfrac{x^3-2y^3}{6xy^2+4y^3} \cdot \dfrac{y^3-2x^3}{15x^2y-10xy^2} \cdot$

$$\frac{135x^7+18x^6y+12x^5y^2-287x^4y^3+82x^3y^4+80x^2y^5-56xy^6+16y^7}{810x^5y^2-720x^3y^4+160xy^6}$$

g) $\dfrac{2x^4-3x^3y+y^4}{2x^3y-12x^2y^2+18xy^3} \cdot \dfrac{x^4-2xy^3-2y^4}{3x^4-27x^2y^2} \cdot$

$$\frac{6x^7+25x^6y-63x^4y^3+7x^3y^4+21x^2y^5-9xy^6-27y^7}{6x^6y-108x^4y^3+486x^2y^5}$$

h) $\dfrac{x^4-2x^3y+3y^4}{27x^2y^2+18xy^3+3y^4} \cdot \dfrac{2x^4-3x^2y^2-y^4}{18x^3y-2xy^3} \cdot$

$$\frac{18x^7-102x^6y+26x^5y^2+83x^4y^3+54x^3y^4-27x^2y^5+6xy^6+2y^7}{486x^5y^2-108x^3y^4+6xy^6}$$

$$i)\ \frac{x^3-2x^2-3x+1}{288x^3-72x}\cdot\frac{2x^3-x+3}{240x^2-240x+60}\cdot\frac{-x^3+2x^2+x-3}{360x^3-540x^2+270x-45}$$

$$j)\ -\frac{x+\frac{5}{6}y}{12x^3-60x^2y+75y^2x}+\frac{-\frac{4}{3}x-\frac{38}{9}y}{8x^2y+40xy^2+50y^3}-\frac{\frac{8}{9}x+\frac{35}{9}y}{4x^3-25xy^2}$$

8. Să se efectueze operațiile în expresiile următoare și să se afle valoarea numerică a rezultatelor pentru $x=-1 \quad y=-2$.

$$a)\ \left(\frac{9y^2+55xy+x^2}{108x^2-300y^2}-\frac{2y-x}{12x-20y}-\frac{3y-x}{18x+30y}\right)\times\frac{9x-15y}{16x^2-9y^2}$$

$$b)\ \left(\frac{x+2y}{12x-9y}-\frac{113xy-29x^2-10y^2}{192x^2-108y^2}-\frac{3x-y}{16x+12y}\right)\times\frac{16x-12y}{9x^2-25y^2}$$

9. Să se efectueze operațiile și să se afle valoarea numerică a rezultatului pentru $x=-1$ în expresiunea :

$$\frac{3-\frac{5}{2x+6}+\frac{5}{2x-6}}{\frac{125x}{8x^2+32x+32}-\frac{75}{16x+32}+\frac{1}{16x-32}-1}$$

10. Să se rezolve ecuațiile următoare și să se verifice rădăcina.

$$a)\ \frac{3x-2}{36}-\frac{4x-3}{54}=\frac{5}{72}-\frac{x+3}{24}-\frac{5}{108}$$

b) $x-\frac{(2x-1)(x+3)}{63}-\frac{3x+2}{28}=2-\frac{(4x-3)(x-5)}{126}-\frac{1}{84}$

$(R.:\ x=3)$

c) $\frac{75}{88}-\frac{(2x-3)(3x+1)}{132}-\frac{x+1}{24}=4-\frac{(3x-2)(x-5)}{66}-x$

$(R.:\ x=4)$

d) $\frac{(3x-5)(4x-1)}{195}-\frac{(2x-3)(2x+3)}{65}-\frac{2(3x-7)}{585}+$

$+2=x-\frac{8}{117}$ $(R.:\ x=2)$

e) $\frac{5x}{42}-\frac{(3x-1)(2x-3)}{63}-2(x-5)+\frac{43}{504}=x-$

$-\frac{(4x-5)(4x+1)}{168}-4$

f) $2x-\frac{(3x-1)(7x+5)}{546}-\frac{x+5}{182}+\frac{4x-1}{52}=\frac{3x-2}{126}-$

$-\frac{(9x-2)(2x-1)}{468}-4-\frac{1}{36}$ $(R.:\ x=-2)$

g) $\frac{4x-1}{325}-\frac{(x-2)(7x+3)}{1365}-\frac{x+12}{455}=\frac{2x-1}{315}-$

$-\frac{(5x-1)(3x-2)}{2925}-\frac{3}{105}$

h) $\frac{(9x^2-x-16)(2x-1)}{306}-\frac{(3x^2-x-2)(3x-2)}{153}+$

$+\frac{x-3}{102}-\frac{3x^2-4}{136}x=\frac{4}{153}-\frac{75x}{68}$

BCU IASI BIBLIOTECA UNIVERSITARA LIBRARY

11. Să se rezolve prin *metoda substituției* sistemele:

$$a)\ \begin{cases} 12x+35y=59 \\ 18x-28y=8 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 56x+15y=-3 \\ -40x+63y=125 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 28x-45y=-6 \\ 21x-20y=23 \end{cases}$$

12. Să se rezolve prin *metoda reducerii* sistemele:

$$a)\ \begin{cases} 108x-49y=-39 \\ 180x+77y=411 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 63x+16y=31 \\ 84x-24y=132 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 432x-125y=1239 \\ 288x+175y=51 \end{cases}$$

13. Să se rezolve sistemele și să se verifice soluția:

$$a)\ \begin{cases} 1240x-75y=100y-1004x+1894 \\ 1600x+140y=2173-83x-105y \end{cases} \qquad R.:\ \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 130x-100y+2=25x+4y+9 \\ 80x+120y-1=-4x+3y+20 \end{cases} \qquad R.:\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{7} \\ y=\dfrac{1}{13} \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 4x-5(y-100x+2)=-2(140y-39) \\ 99-100(6y-2x+1)=x-(17x-5y+29) \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} \dfrac{3+2y+x}{126}-\dfrac{2x+y-1}{63}-\dfrac{x-2y+5}{28}+x+\dfrac{1}{7}= \\ =2+\dfrac{y}{4}-\dfrac{1}{14}+\dfrac{x}{42}+\dfrac{1}{9} \\ -14x+9y=-6 \end{cases} \qquad R.:\ \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$$

BCU CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

e) $\begin{cases} \dfrac{5x+4y-4}{39}-\dfrac{x-2y-15}{78}=\dfrac{105x-y-205}{117}+x- \\ -\dfrac{2}{3}=2+\dfrac{x}{12}-\dfrac{y-3}{36}+\dfrac{1}{18} \\ -42x+11y=-29 \end{cases}$ $R.: \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{3x}{125}-\dfrac{1}{25}-\dfrac{6y-x+7}{28}+1=-\dfrac{2}{35}-\dfrac{2x-3y-4}{175}+\dfrac{4}{125} \\ -83x+162y=399 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \dfrac{2x-3(x+y-5)}{153}-\dfrac{x-y}{51}+\dfrac{x-(2y-x)}{68}-\dfrac{y+2}{102}=\dfrac{1}{306} \\ 5x+9y=23 \end{cases}$ $R.: \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dfrac{2x+y+6}{1386}-\dfrac{4x-5y+8}{924}-\dfrac{3x-2y+7}{66}= \\ =\dfrac{11}{231}-\dfrac{9x+10y+27}{252} \\ 42x-211y=-127 \end{cases}$

14. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x-\dfrac{3x-2y-2}{27}-\dfrac{149}{252}=2-\dfrac{-2x+2y+3}{189}+\dfrac{x-3y+4}{28} \\ 546\ ax-116by=512 \end{cases}$$

1°. Pentru $a=1$ $b=1$; *2°.* In general; *3°.* Să se găsească valorile parametrilor a, b pentru care sistemul este nedeterminat; *4°.* Să se găsească valorile literelor a, b, pentru care ecuațiile sunt incompatibile.

15. Să se rezolve sistemele :

$a)$ $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=-10 \\ z+x=-2 \end{cases}$ $R.:$ $\begin{cases} x=5 \\ y=-3 \\ z=-6 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{7} \\ x+y+z=5130 \end{cases}$

$c)$ $\begin{cases} 112x-135y-245z=351 \\ -168x-315y+392z=-2177 \\ 144x+189y-280z=1399 \end{cases}$ $R.:$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=+3 \\ z=-4 \end{cases}$

$d)$ $\begin{cases} 147x+14y-18z=-1 \\ 252x+24y+45z=150 \\ 840x-32y+63z=1222 \end{cases}$

16. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} 2x-\dfrac{4y-z+3}{4900}-\dfrac{z-3x-3y}{3780}-6=\dfrac{46}{35075}-\dfrac{5-3x-2y}{1960} \\ 529005x-276y-16z=1587455 \\ -115y+14z=328 \end{cases}$$

2^0 Să se cerceteze dacă ecuațiile sunt compatibile pentru $x=3$ și să se găsiască soluția în acest caz.

(*R.* : 1^0) *Sistemul cu 3 necunoscute este nedeterminat*; 2^0 $\begin{cases} y=-2 \\ z=7 \end{cases}$)

17. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 3x - \dfrac{2y-2z+5}{3920} - \dfrac{3x+2y-z}{2520} - 6 = \dfrac{233}{35280} - \dfrac{-7+2x-y}{6300} \\ 264523x - 129y + 80z = 529993 \\ 215y + 48z = -309 \end{cases}$$

2^0 Să se cerceteze dacă ecuațiile sunt compatibile pentru $x=2$ și să se găsiască soluția în acest caz.

(*R.*: 1^0) *Sistemul cu 3 necunoscute este nedeterminat.* 2^0 $\begin{cases} y = -3 \\ z = 7 \end{cases}$)

18. Un librar a încasat pe 18 călimări și 1 dicționar suma de 10710 lei. Care este prețul unei călimări și a dicționarului dacă cu diferența dintre $\frac{3}{8}$ din prețul călimării și $\frac{2}{63}$ din prețul dicționarului s'ar fi putut cumpăra un obiect care costă $\frac{9}{56}$ din prețul călimării și altul în valoarea de $\frac{5}{42}$ din prețul dicționarului și ar fi mai rămas 25 lei.

(*R*: *Prețul călimării 560 lei, a dicționarului 630 lei*)

19. Un librar a încasat pe 23 călimări și 43 dicționare suma de 44400 lei. Care este prețul unei călimări și a unui dicționar dacă cu diferența dintre $\frac{7}{9}$ din prețul călimării și $\frac{9}{56}$ din prețul dicționarului s'ar fi putut cumpăra un obiect care costă $\frac{5}{36}$ din prețul călimării și altul

în valoare de $\frac{2}{21}$ din prețul dicționarului și ar mai fi rămas încă 15 lei.

(*R*: *Prețul călimării 360 lei, a dicționarului 840 lei*)

20. Un om are o sumă de bani; cheltuește $\frac{4}{15}$ din ea pentru o pereche de ghete, 20 lei pentru ziare; cumpără apoi $2\frac{1}{2}$ m de postav pentru haine și cu $\frac{5}{12}$ din rest plătește o datorie; rămâne cu 1400 lei. Ce sumă a avut și cât a costat metrul de postav dacă cumpărând 5 m de postav, fără să fi făcut alte cheltueli ar fi rămas cu 1900 lei.

(*R.*: *6300 lei*; *880 lei.*).

21. Într'o familie, în care și bărbatul și femeia sunt funcționari, se cheltuește lunar: pentru chirie, $\frac{4}{15}$ din leafa femeii și $\frac{14}{55}$ din leafa bărbatului; pentru hrană și încălzit, $\frac{47}{88}$ din restul lefii femeii și $\frac{4}{9}$ din restul lefii bărbatului; pentru îmbrăcăminte, se cheltuește $\frac{7}{36}$ din suma lefilor lor; pentru distracții, se cheltuește $\frac{5}{12}$ din diferența dintre leafa bărbatului și a femeii; restul de 2110 lei se economisește. Să se afle care este leafa lunară a fiecăruia știind că diferența între leafa ei pe 203 luni și leafa lui pe 130 luni este de 174600 lei.

(*R.*: *leafa femeii 7200 lei*; *leafa bărbatului 9900 lei*).

22. Un școlar, care trebuia să citească o carte într'o săptămână, citește Luni un anumit număr de pagini;

Marți, citește fracțiunea $\frac{7}{36}$ din partea rămasă necitită; Miercuri, citește cu o pagină mai mult decât fracțiunea $\frac{17}{24}$ din partea citită Luni; Joi, $\frac{11}{60}$ din cartea întreagă; Vineri, a treia parte din numărul paginilor citite în ultimile trei zile. Sâmbătă citește restul de 56 pagini. Dacă citea zilnic cât citise Luni, isprăvea cartea în 5 zile. Să se afle câte pagini avea cartea și cât citese Luni.

(*R*: *Cartea avea 360 pagini*; *Luni citise 72 pagini.*)

23. Un negustor a cumpărat într'o zi 3m de postav și 4m de pânză; a doua zi, a cumpărat 2m postav, plătind pe fiecare metru $\frac{19}{24}$ din prețul plătit în prima zi și 5m pânză, plătind pe metru $\frac{7}{8}$ din prețul plătit în prima zi; a III-a zi a cumpărat 4m postav, plătind pe metru $\frac{16}{19}$ din valoarea plătită în ziua precedentă și 3m pânză, plătind pe fiecare metru $\frac{4}{5}$ din valoarea plătită în ziua precedentă. El a plătit în total 6445 lei. Ce preț a plătit pe metrul de postav și pe metrul de pânză în prima zi, dacă pe 145m postav ar fi plătit cu 3200 lei mai mult decât pe 149m de pânză.

(*R.*: *Prețul metrului de postav 600 lei*; *de pânză, 200 lei*)

24. Trei copii *A*, *B*, *C* se iau la întrecere la alergat. Cel ce ajunge întâi primește premiu $\frac{3}{5}$ din suma ce are; cel ce ajunge al doilea primește $\frac{1}{4}$ din suma ce posedă; cel ce ajunge ultimul plătește la ceilalți doi. Ei aleargă

de trei ori și ajung în ordinea : I *B*, *C*, *A* ; II-lea *C*, *A*, *B* ; III-lea *A*, *B*, *C*. Se despart având : *A*, 64 lei ; *B*, 65 lei ; *C*, 59 lei. Câți lei a avut fiecare la început.

(*R.* : *A*, *80 lei* ; *B*, *60 lei* ; *C*, *48 lei*.).

25. Trei copii *A*, *B*, *C* se iau la întrecere la alergat. Cel ce ajunge întâi primește premiu $\frac{5}{6}$ din suma ce are ; cel ce ajunge al II-lea, $\frac{1}{5}$ din suma ce are ; cel ce ajunge ultimul plătește la ceilalți doi. Ei aleargă de trei ori și ajung în ordinea : I *A*, *B*, *C* ; II-lea *B*, *C*, *A* ; III-lea *C*, *A*, *B*. Se despart având : *A*, 84 lei ; *B*, 46 lei ; *C*, 110 lei. Câți lei a avut fiecare la început.

(*R.* : *A*, *72 lei* ; *B*, *50 lei* ; *C*, *118 lei*.).

26. La o moșie s'a plătit pentru 4 zile de lucru 2895 lei. In prima zi, au lucrat 5 femei și 3 bărbați ; a II-a zi, 4 femei și 3 bărbați, fiecare femeie primind $\frac{5}{6}$ din suma primită în prima zi de o femeie, fiecare bărbat primind $\frac{24}{25}$ din suma primită în prima zi de un bărbat ; a III-a zi, au lucrat 7 femei și 1 bărbat, femeia primind $\frac{33}{25}$ din suma primită a doua zi de o femeie, bărbatul primind $\frac{5}{8}$ din suma primită a II-a zi de un bărbat ; a IV-a zi au lucrat 5 bărbați, primind fiecare $\frac{4}{5}$ din semi suma părților primite de o femeie și un bărbat în prima zi. Care sunt sumele primite de o femeie și de un bărbat în prima zi, dacă plata a 541 femei întrece cu 990 lei plata a 318 bărbați, fiecare fiind plătit ca în prima zi.

(*R* : *Suma primită de o femeie 90 lei, de un bărbat 150 lei*)

27. La o moșie s'a plătit pentru 4 zile de lucru 3194 lei. In prima zi, au lucrat 4 femei și 2 bărbați; a II-a zi, 5 femei și 7 bărbați, fiecare femeie primind $\frac{8}{9}$ din suma primită de o femeie în prima zi, fiecare bărbat primind $\frac{11}{15}$ din suma primită de un bărbat în prima zi; a III-a zi, au lucrat 3 femei și 5 bărbați, femeia primind $\frac{27}{20}$ din suma primită în ziua precedentă de o femeie, bărbatul primind $\frac{4}{5}$ din suma primită de un bărbat în ziua precedentă; a IV-a zi au lucrat 6 bărbați primind fiecare $\frac{5}{6}$ din semisuma părților primite de o femeie și un bărbat în prima zi. Care sunt sumele primite de o femeie și un bărbat în prima zi, dacă suma de plată a 377 bărbați întrece cu 6060 lei suma de plată a 561 femei, fiecare fiind plătit ca în prima zi.

(*Răsp.* : *Suma primită de o femeie, 90 lei, de un bărbat 150lei*)

28. Venitul unui funcționar se compune din salarul său lunar și din dobânda unui capital depus cu 8% pe an. El cheltuește lunar $\frac{3}{8}$ din tot venitul său pentru hrană; $\frac{7}{15}$ din dobânda capitalului său, pentru chirie; $\frac{11}{25}$ din suma rămasă din salar, pentru îmbrăcăminte; $\frac{2}{5}$ din suma rămasă din venitul total după cheltuelile precedente, pentru cărți; iar restul de 2679 lei îl economisește.

Se întreabă care este salarul lui lunar și ce capital avea dacă $\frac{1}{3}$ din capital întrece salarul său pe $\frac{3}{4}$ de an cu 13700 lei.

(*Răspuns* : *Salarul, 5700 lei*; *capitalul 195000 lei*)

29. Un proprietar are o casă și o moșie. Fracțiunea $\frac{2}{5}$ din venitul moșiei întrece cu 54000 lei fracțiunea $\frac{11}{12}$ din venitul casei. Venitul casei este depus cu 10% pe an; după un an, proprietarul mărește capitalul crescut din acest venit cu $\frac{7}{8}$ din el și lasă toată suma încă 1 an la dobândă cu 8% pe an; constată că dobânda adusă în ultimul an întrece cu 900 lei $\frac{1}{5}$ din dobânda adusă de venitul moșiei în timp de 2 ani, depus cu 9% pe an. Să se afle venitul adus de casă și cel adus de moșie.

(*R.*: *Venitul casei 60000 lei, al moșiei 250000 lei*).

30. Un proprietar are o casă și un loc. Fracțiunea $\frac{9}{10}$ din venitul casei întrece cu 31000 lei fracțiunea $\frac{5}{24}$ din venitul moșiei. Venitul casei este depus cu 8% pe an; după un an, proprietarul mărește capitalul crescut din acest venit cu $\frac{5}{9}$ din el și lasă toată suma încă un an la dobândă; constată că dobânda produsă de această sumă într'un an întrece cu 1608 lei a patra parte din dobânda adusă de venitul moșiei pe 2 ani, depus cu 10% pe an. Să se afle venitul adus de casă și cel adus de moșie.

(*R.*: *Venitul casei 90000 lei*; *venitul moșiei 240000 lei*).

31. Un om cumpără o casă și un loc cu prețul de 840000 lei amândouă, pe care le plătește în 5 rate: I plătește $\frac{2}{3}$ din prețul casei și $\frac{3}{8}$ din prețul locului; a II-a oară plătește $\frac{17}{40}$ din restul prețului casei și $\frac{4}{15}$ din restul pre-

ţului locului; a III-a dată plăteşte $\frac{3}{56}$ din suma preţurilor totale; a IV-a oară, plăteşte $\frac{2}{9}$ din diferenţa preţurilor; iar a cincea oară plăteşte restul de 100000 lei. Să se afle preţul casei şi al locului.

(*R.*: *preţul casei 600000 lei*; *al locului 240000 lei*).

32. O persoană primeşte o moştenire. O parte o pune la dobândă cu 10% pe an; iar pe cea rămasă, o întrebuinţează în felul următor: cumpără o casă care valorează $\frac{16}{45}$ din toată moştenirea; face o călătorie cheltuind o sumă egală cu fracţiunea $\frac{7}{32}$ din preţul casei; cumpără cărţi dintr'o sumă egală cu $\frac{8}{15}$ din rest. Aceste cheltueli întrec cu 2000 lei fracţiunea $\frac{5}{6}$ din partea nedepusă la dobândă. Să se afle suma moştenită şi partea depusă la dobândă, dacă această sumă depusă, mărită cu dobânda ei pe 5 ani întrece cu 50000 lei fracţia $\frac{4}{9}$ din moştenire.

(*R*: *Suma moştenită 900000 lei*; *partea depusă 300000 lei*).

GEOMETRIE.

Probleme rezolvate.

1. *Într'un triunghiu dreptunghiu, o catetă și proiecția ei pe ipotenuză sunt proporționale cu numerele 5 și 3; iar fracția* $\frac{3}{4}$ *din aceiaș catetă este cu 1 cm mai mică decât suma dintre fracțiile* $\frac{4}{15}$ *din ea și* $\frac{5}{6}$ *din proiecția ei pe ipotenuză. Să se calculeze: 1º. Laturile triunghiului dreptunghiu; 2º. Raza cercului înscris în exagonul construit pe ipotenuză.*

Necunoscutele sunt:

$$AC = x \qquad AB = y \qquad BC = z.$$

Fiind 3 necunoscute, trebuesc 3 ecuații pentru determinarea lor.

Una dintre ecuații este relația generală dintre laturile unui triunghiu dreptunghiu dată de *teorema lui Pythagora.*

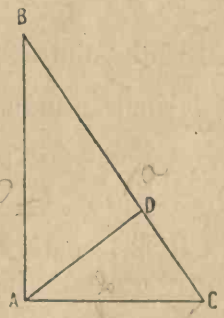

Fig. 6.

(I.) $x^2 + y^2 = z^2$

Alte ecuații se vor forma căutând relații între datele problemei și necunoscute, căutând să se exprime în funcțiune de necunoscute acele cantități care depind

de necunoscute. Fie AC, cateta despre care e vorba în enunțiu; proiecția ei pe ipotenuză CD, necunoscută; datele problemei referindu-se la acest segment, este necesar pentru punerea problemei în ecuații să introducem această nouă necunoscută : $CD = u$. Fiind patru necunoscute, vor trebui patru ecuații. A doua ecuație se obține numai decât exprimând proporționalitatea dintre x, u și numerile 5, 3.

$$\text{(II.)} \quad \frac{x}{5} = \frac{u}{3}$$

Pentru ecuația a III-a exprim în mod algebric : $\frac{3}{4}$ din catetă : $\frac{3x}{4}$; $\frac{4}{15}$ din catetă este de 4 ori a 15-a parte din catetă : $4 \times \frac{x}{15} = \frac{4x}{15}$; $\frac{5}{6}$ din proiecția ei pe ipotenuză : $\frac{5u}{6}$; suma dintre ultimele 2 fracții :

$$\frac{4x}{15} + \frac{5u}{6}$$

Relația dintre această sumă și $\frac{3x}{4}$, $\frac{4x}{15} + \frac{5u}{6} > \frac{3x}{4}$ de unde ecuația :

$$\text{(III.)} \quad \frac{4x}{15} + \frac{5u}{6} - \frac{3x}{4} = 1$$

Ultima ecuația este dată de relația metrică generală dintre o catetă, ipotenuză și proiecția ei pe ipotenuză : *O catetă este medie proporțională între ipotenuză și proiecția ei pe ipotenuză* :

$$\text{(III.)} \quad x^2 = z \,.\, u$$

Deci sistemul pentru determinarea celor 4 necunoscute este :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{5} = \dfrac{u}{3} \\ \dfrac{\overset{4}{\cancel{4}}x}{\underset{15}{\cancel{15}}} + \dfrac{\overset{10}{\cancel{10}}u}{\underset{6}{\cancel{6}}} - \dfrac{\overset{15}{\cancel{15}}x}{\underset{4}{\cancel{4}}} = \dfrac{\overset{60}{\cancel{60}}}{\cancel{60}} \\ x^2 = zu \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

Din acest sistem, primele 2 ecuații conțin numai două necunoscute, deci le determină, formând un sistem de 2ec. cu 2nec. care se rezolvă : Eliminăm numitorii : *c.m.m.m.c.* al numitorilor în ec. II-a este 60.

$$\begin{cases} 3x = 5u \\ 16x + 50u - 45x = 60 \end{cases}$$

Se reduc termenii asemenia

$$\begin{cases} 3x = 5u \\ -29x + 50u = 60 \end{cases}$$

Intrebuințez pentru eliminarea unei necunoscute *metoda substituției, ecuația I fiind omogenă.*

$$u = \frac{3x}{5}$$

$$-29x + 30x = 60$$

$$x = 60 \text{ cm.}$$

$$u = \frac{3 \times 60}{5} = 3 \times 12 = 36 \text{ cm.}$$

Se substitue valorile găsite în celelalte ecuații :

$$\begin{cases} 60^2 = 36z \\ 60^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

Prima nu conține decât necunoscuta z, o determină :

$$z = \frac{60^2}{36} = \frac{\overbrace{60}^{6} \times \overbrace{60}^{6}}{36} = 100 \text{ cm.}$$

$$y^2 = z^2 - 60^2 = 100^2 - 60^2 = 10^2 (10^2 - 6^2) =$$
$$10^2 \times 2^2 (5^2 - 3^2) = 10^2 \times 2^2 \times 4^2$$

$$y = 10 \times 2 \times 4 = 80 \text{ cm.}$$

2°. *Raza cercului înscris în exagonul* construit pe ipotenuză *este apotema exagonului*, a cărui latură este ipotenuza.

Insemn apotema cu a, raza cu R, latura cu l

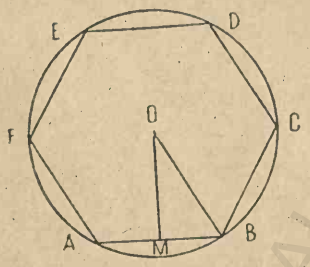

Fig. 7.

$$\begin{cases} a^2 = R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ R = l \end{cases}.$$

Elimin pe R

$$a^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

In special pentru $l = 100$

$$a = 50\sqrt{3}$$

*

2. *Intr'un paralelipiped dreptunghiu, suma dintre* $\frac{1}{18}$ *din lungime și fracțiunea* $\frac{4}{45}$ *din lățime întrece diferența dintre fracțiunea* $\frac{16}{315}$ *din jumătatea perimetrului bazei și fracțiunea* $\frac{4}{3}$ *dintr'o treime a lungimei cu*

18 cm; iar o sfoară care coprinde de 19 ori lungimea, coprinde lățimea de 21 ori și mai rămân 195 cm. Să se afle: 1º. Dimensiunile bazii paralelipipedului dreptunghiu; 2º. Aria sa laterală; 3º. Diagonala paralelipipedului, știind că raportul dintre volumul acestui paralelipiped și a unui tetraedru regulat cu muchia de 180 cm. este de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

1º. Dimensiunile bazii sunt: lungimea, pe care o însemn cu L și lățimea pe care o însemn cu l. Fiind două necunoscute, trebuesc 2 ecuații pentru determinarea lor.

Se pune sub formă de expresiuni algebrice în funcție de necunoscute, diferitele cantități, despre care e vorba în problemă:

$\frac{1}{18}$ din lungime: $\frac{L}{18}$

$\frac{4}{45}$ din lățime înseamnă de 4 ori a 45-a parte din lățime: $4 \times \frac{l}{45} = \frac{4l}{45}$

Suma dintre aceste fracții: $\frac{L}{18} + \frac{4l}{45}$.

Perimetrul bazii: $2(L + l)$; jumătatea perimetrului $L + l$; $\frac{16}{315}$ din jumătatea perimetrului este de 16 ori a 315-a parte din $L + l$:

$$16 \times \frac{L + l}{315} = \frac{16(L + l)}{315}$$

$\frac{1}{3}$ a lungimii: $\frac{L}{3}$

$\frac{4}{5}$ dintr'o treime a lungimii este de 4 ori a cincea parte din $\frac{L}{3}$ adică : $4 \times \frac{\frac{L}{3}}{5} = \frac{4L}{15}$.

Diferența dintre $\frac{16}{315}$ din jumătatea perimetrului și $\frac{4}{5}$ dintr'o treime a lungimii este : $\frac{16(L+l)}{315} - \frac{4L}{15}$.

Caut o relațiune de mărime între aceste expresiuni :

$\frac{L}{18} + \frac{4l}{45} > \left[\frac{16(L+l)}{315} - \frac{4L}{15}\right]$ de unde rezultă ecuația :

(I) $\frac{L}{18} + \frac{4l}{45} - \left[\frac{16(L+l)}{315} - \frac{4L}{15}\right] = 18$

A doua ecuație o formez din a doua idee principală din problemă. Iarăși exprim algebric diferite cantități :

O sfoară care cuprinde de 19 ori lungimea : $19L$. In această sfoară intră lățimea de 21 ori și mai rămâe 195cm. Considerând sfoara ca deîmpărțit, lățimea ca împărțitor, câtul este 21 și restul 195. Exprimând relația, care există între deîmpărțit, împărțitor, cât și rest : $D = I \times C + R$, obțin ecuația :

(II) $19L = 21l + 195.$

Aceiaș ecuație se obținea căutând să se exprime o aceiaș cantitate prin două expresiuni algebrice ; din egalarea celor două expresiuni rezultă ecuația. Aici, aceiaș cantitate este lungimea sfoarei ; cele două expresiuni sunt : lungimea sforei comparată cu lungimea (în funcțiune de) bazii ; lungimea sfoarei în funcțiune de lățimea bazii.

Rămâne de rezolvit sistemul :

$$\begin{cases} \overset{35}{\overbrace{\frac{L}{18}}} + \overset{14}{\overbrace{\frac{4l}{45}}} - \overset{2}{\overbrace{\frac{16L+16l}{315}}} + \overset{42}{\overbrace{\frac{4L}{15}}} = \overset{630}{\overbrace{18}} \\ 19L - 21l = 195. \end{cases}$$

Elimin numitorii în prima ecuație :

$$18 = 2 \times 3^2 \quad 45 = 3^2 \times 5 \quad 315 = 3^2 \times 5 \times 7 \quad 15 = 3 \times 5$$

$$C.m.m.m.C. = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 315 \times 2 = 630$$

$$\begin{cases} 35L + 56l - 32L - 32l + 168L = 11340 \\ 19L - 21l = 195 \end{cases}$$

$$315 \mid 3^2$$
$$35 \mid 5 \times 7$$
$$1 \mid$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \hline 63 \\ \hline 54 \\ \hline 108 \\ \hline 1134 \end{array}$$

$$I' \begin{cases} 171L + 24l = 11340 \mid 7 \\ 19L - 21l = 195 \mid 8 \end{cases}$$

Simplific ecuația I cu 3.

$$II' \begin{cases} 57L + 8l = 3780 \\ 19L - 21l = 195 \end{cases} \Big| 3$$

Elimin pe L, amplificând ecuația a II-a cu 3 și scăzând ecuațiile :

$$\begin{cases} 57L + 8l = 3780 \\ \overline{-57L} \overset{+}{-} \overline{63l} = \overline{585} \end{cases}$$

$$71l = 3195 \qquad 3195 : 71 = 45$$

$$l = \frac{3195}{71} = 45 \text{ cm} \qquad \begin{array}{r} \overline{355} \\ \hline 0 \end{array}$$

Elimin pe l servindu-mă de sistemul sub forma I'

$$24 = 2^3 \times 3 \quad 21 = 3 \times 7$$

$$C.m.m.m.c. = 2^3 \times 3 \times 7 = 24 \times 7 = 168$$

$$\begin{cases} 1197L + 168l = 79380 \\ 152L - 168l = 1560 \end{cases}$$

$$1349L = 80940$$

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

$$L = \frac{80940}{1349} = 60\ cm$$

2^0. Aria lat. $= P \times I = 2(L + l)I$.

Înălțimea este necunoscută, trebuește o ecuație pentru a o determina.

In problemă se vorbește de volumul paralelipipedului și volumul unui tetraedru, cantități ce trebuesc introduse ca noi necunoscute V_p și V_t. Trebuesc prin urmare 3 ecuații :

$$V_p = L.l.I.$$

$$\frac{V_p}{V_t} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

A treia ecuație va rezulta din exprimarea volumului tetraedrului în funcție de muchia sa, care este cunoscută.

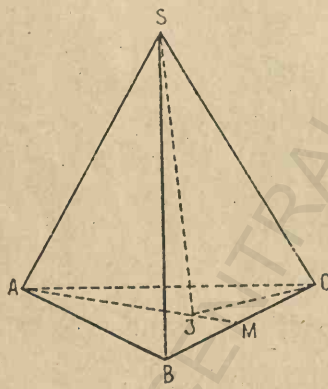

Fig. 8.

$$V_t = \frac{\text{arie } ABC \times SI}{3}$$

$$\text{arie } ABC = \frac{BC \times AM}{2}$$

Insemn $BC = l$, $AM = i$, $SI = I$.

$$\text{arie } ABC = \frac{li}{2}$$

Exprim pe i în funcție de l aplicând *teorema lui Pythagora* triunghiului dreptunghiu ABM

$$i^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \qquad i = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{arie } ABC = \frac{l \times \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Exprim pe I în funcție de l cu ajutorul triunghiului dreptunghiu SIC : $I^2 = l^2 - R^2$.

R fiind raza cercului circumscris triunghiului de bază; trebue încă o ecuație pentru eliminarea lui R, ecuație care este relația între latura triunghiului echilateral și raza cercului circumscirs:

$$l = R\sqrt{3}$$

de unde:

$$R = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

$$I^2 = l^2 - \frac{l^2}{3} = \frac{2l^2}{3}$$

$$I = \frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$V_t = \frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{3} = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$$

Deci sistemul pentru cele 3 necunoscute I, V_p, Vt este

$$\begin{cases} 45 \times 60\, I = V_p \\ \dfrac{V_p}{V_t} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ V_t = \dfrac{180^3\sqrt{2}}{12} \end{cases}$$

V_t se elimină substituindu-i valoarea în ecuația a II-a $V_p = \frac{V_t}{\sqrt{2}} = \frac{180^3}{12}$; valoare substituită în prima ecuație dă:

$$450 \times 6\, I = \frac{180^3}{12}$$

105
36
630
315
3780

$$I = \frac{\overbrace{180^3}^{60}}{12 \times 6 \times 450} = \frac{\overbrace{3^3 \times 60^2}^{9 \times 12}}{12 \times 45} = \frac{3 \times 12 \times 5^2}{5} =$$

$$= 3 \times 12 \times 5 = 180\ cm.$$

Aria $lat = 2(60 + 45) \times 180 = 360 \times 105 = 37800\ cm.$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3^0. Trebue să se exprime diagonala paralelipipedului în funcție de cele 3 dimensiuni ale paralelipipedului, care îl determină. Se aplică *teorema lui Pythagora* triunghiului FDB, dreptunghiu în B de oarece FB fiind perpendiculară pe planul bazei este perpendiculară pe orice dreaptă din planul bazii.

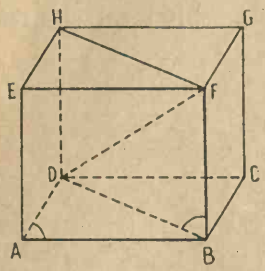

Fig. 9.

$FB = I$, DB este diagonala bazei, o însemn cu d.

$D^2 = d^2 + I^2$.

Am introdus necunoscuta d, trebue o ecuație pentru a o elimina. Aplic *teorema lui Pythagora* triunghiului DBA, dreptunghiu în A, de oarece paralelipipedul e dreptunghiu.

$$d^2 = L^2 + l^2$$

Făcându-se eliminarea lui d^2, se obține :

$$D^2 = L^2 + l^2 + I^2$$

$\sqrt{169}$ | 13
69 | $23 \times 3 = 69$
0

In cazul special $L=60$ $l=45$ $I=180$:

$D^2 = 60^2 + 45^2 + 180^2 = 3^2 \times 5^2 (2^4 + 3^2 + 2^4 \times 3^2) =$
$= 3^2 \times 5^2 (16 + 9 + 144) = 3^2 \times 5^2 \times 169.$

$$D = 3 \times 5 \times 13 = 65 \times 3 = 195\, cm.$$

3. *Un turn de forma unei prisme exagonale regulate este astfel încât după ce urci* $\frac{5}{6}$ *din înălțimea lui și apoi cobori* $\frac{7}{15}$ *din înălțimea urcată, trebue să mai urci* $\frac{3}{10}$ *din restul înălțimii ca să ajungi cu 20 metri mai sus de jumătatea înălțimii lui. Să se afle suprafața pereților turnului, dacă în turn încap* $\frac{3240}{\sqrt{3}}$ m^3 *de aer.*

Aria lat. $= P \times I = 6LI.$

L, I sunt necunoscute, trebuesc două ecuații independente pentru a le determina.

Caut să exprim în funcție de I, diferite date ale problemei, care depind de I.

Înălțimea urcată prima dată este de 5 ori a 6-a parte din I: $5 \times \frac{I}{6} = \frac{5I}{6}$; partea coborâtă este de 7 ori a 15-a parte din $\frac{5I}{6}$ adică: $7 \times \frac{\frac{5I}{6}}{15} = \frac{\overset{5}{\cancel{7}} \times 5I}{6 \times \underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{7I}{18}$.

Înălțimea la care se află după ce coborâse: $\frac{5I}{6} - \frac{7I}{18}$.

Partea ce rămâne de urcat:

$$I - \left(\frac{5I}{6} - \frac{7I}{18}\right) = I - \frac{5I}{6} + \frac{7I}{18}$$

$\frac{3}{10}$ din această parte este de 3 ori a 10-a parte din rest adică:

$$3 \times \frac{I - \frac{5I}{6} + \frac{7I}{18}}{10} = \frac{3}{10}\left(I - \frac{5I}{6} + \frac{7I}{18}\right)$$

Înălțimea la care se afla după această urcare:

$$\frac{5I}{6} - \frac{7I}{18} + \frac{3}{10}\left(I - \frac{5I}{6} + \frac{7I}{18}\right)$$

Ecuația se formează căutând să se exprime prin altă metodă aceiaș înălțime la care se află după ce urcase a doua oară.

O jumătate din înălțime: $\frac{I}{2}$.

Înălțimea la care se afla fiind cu 20 m. mai sus ca jumătatea înălțimei este: $\frac{I}{2} + 20$.

Egalând cele două expresiuni, care reprezintă aceiaș cantitate se obține ecuația pentru înălțime.

$$(I)\quad \frac{5I}{6}-\frac{7I}{18}+\frac{3}{10}\left(I-\frac{5I}{6}+\frac{7I}{18}\right)=\frac{I}{2}+20$$

A doua ecuație se obține din expresiunea volumului cunoscut în funcție de latura poligonului de bază și înălțime.

$$\text{Vol.} = \text{Aria } B \times I = \frac{Pa}{2}\cdot I = \frac{6La}{2} I = 3L.a.I.$$

Trebue exprimată apotema în funcție de latura exagonului.

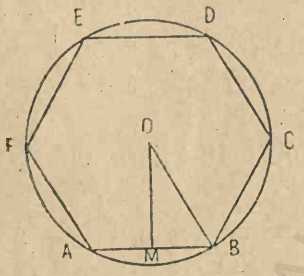

Fig. 10.

$$a^2 = R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4}$$

$$a = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

$$(II)\quad \text{Vol} = \frac{3L^2I\sqrt{3}}{2}$$

Sistemul pentru determinarea celor 2 necunoscute este :

$$\begin{cases} \overset{30}{\underset{}{\frac{5I}{6}}}-\overset{10}{\underset{}{\frac{7I}{18}}}+\overset{18}{\underset{}{\frac{3I}{10}}}-\overset{45}{\underset{}{\frac{I}{4}}}+\overset{3}{\underset{}{\frac{7I}{60}}}=\overset{90}{\underset{}{\frac{I}{2}}}+\overset{180}{\underset{}{20}} \\ 3L^2.I.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3240}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Prima ecuație neconținând decât o necunoscută, se rezolvă aparte.

$C.m.m.mc. = 180.$

$$150I - 70I + 54I - 45I + 21I - 90I = 3600$$

$$20\,\emptyset I = 3600\,\emptyset$$

$$I = 180\,m.$$

Valoare pe care o substitui în cealată ecuație :

$$\frac{3L^2 \times 180\sqrt{3}}{2} = \frac{3240\sqrt{3}}{3} = 1080\sqrt{3}$$

$$9L^2 = 36$$

$$L^2 = \frac{36}{9} = 4$$

$$L = 2$$

Aria lat. $= 6 \times 2 \times 180 = 1080 \times 2 = 2160\ m^2$

4. *Într'o piramidă triunghiulară regulată, fracțiunea* $\frac{4}{15}$ *din apotema piramidei mătură cu fracțiunea* $\frac{5}{24}$ *din înălțimea piramidei dă 65 cm; iar o lungime de 35 ori mai mare decât înălțimea întrece cu 600 cm. o lungime de 24 ori mai mare ca apotema piramidei. Să se găsească volumul piramidei.*

$$\text{Vol.} = \frac{\text{Aria } B \times I}{3}$$

Caut să exprim volumul în funcțiune de elementele care determină piramida: latura triunghiului echilateral, pe care o însemn cu l și înălțimea piramidei I.

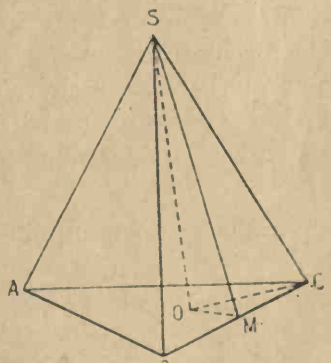

Fig. 11.

$$\text{Aria } B = \frac{li}{2} \text{ sau}$$

$$\text{Aria } B = \frac{3la}{2}$$, i, a, însemnând înălțimea, apotema bazei. Intrebuințez aici cea de a doua dintre formule fiindcă în problemă este vorba de apotema piramidei, care are leagătură cu apotema bazei.

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 = R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ l = R\sqrt{3} \end{array}\right.$$

R însemnând raza cercului circumscris, segment ce trebue eliminat.

$$a^2 = \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{l^2}{2^2} = \overset{4}{\frac{l^2}{3}} - \overset{3}{\frac{l^2}{4}} = \frac{l^2}{12}$$

$$a = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{Aria } B = \frac{3l \times \frac{l}{2\sqrt{3}}}{2} = \frac{3l^2}{4\sqrt{3}} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vol.} = \frac{\frac{l^2 I\sqrt{3}}{4}}{3} = \frac{l^2 I\sqrt{3}}{12}$$

l, I sunt necunoscute; pentru determinarea lor trebuesc două ecuații; dar cum în problemă este vorba de apotema piramidei, necunoscută, pe care o însemnăm cu A, vor trebui 3 ecuații.

Caut să pun datele problemei sub formă de expresiuni:

$\frac{4}{15}$ din apotema piramidei însemnă de 4 ori a 15-a parte din apotemă $4 \times \frac{A}{15} = \frac{4A}{15}$.

$\frac{5}{24}$ din înălțime: $5 \times \frac{I}{24} = \frac{5I}{24}$.

Problema dă o relație între aceste două expresiuni, anume,

(I) $$\frac{4A}{15} + \frac{5I}{24} = 65$$

O lungime de 35 de ori înălțimea : $35I$

O lungime de 24 de ori apotema : $24\ A$.

Problema dă relația $35I > 24A$ anume, diferența este 600 cm :

$$(II) \qquad 35\,I - 24\,A = 600$$

A treia ecuație este relația dată de *teorema lui Pythagora*, aplicată triunghiului dreptunghiu *OSM*.

$$(III) \qquad A^2 - I^2 = a^2$$

Cu această relație nu s'a introdus necunoscuta l, a problemei, ci o nouă necunoscută a, așa că fiind 4 necunoscute, trebue încă o ecuație. Această ecuație este relația găsită mai sus între latura triunghiului echilateral și apotema lui $a = \dfrac{l}{2\sqrt{3}}$

Așa că sistemul este :

$$\begin{cases} \begin{cases} \dfrac{\overbrace{4A}^{8}}{15} + \dfrac{\overbrace{5I}^{5}}{24} = \overbrace{65}^{120} \\ 35I - 24A = 600 \end{cases} \\ A^2 - I^2 = a^2 \\ a = \dfrac{l}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

Primele 2 ecuații formează un sistem determinat, neconținând decât două necunoscute ; se rezolvă a parte.

In prima ecuație elimin numitorii :

$$C.\,m.\,m.\,m.\,c = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$$

$$\begin{array}{c|c|l} 7 & 3 & 32A + 25I = 7800 \\ 5 & 4 & -24A + 35I = 600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 65 \times \\ 12 \\ \hline 130 \\ 65 \\ \hline 780 \end{array}$$

Rezolv prin *metoda reducerii*. Elimin pe A :

$32 = 2^5 \quad 24 = 2^3 \times 3. \quad C.m.m.m.c. = 2^5 \times 3 = 32 \times 3 = 96$

$$\begin{cases} 96A + 75I = 23400 \\ -96A + 140I = 2400 \end{cases}$$

$$215I = 25800$$

$$5160 : 43 = 120$$
$$\begin{array}{l} 86 \\ \hline 00 \end{array}$$

$$I = \frac{\overset{5}{\smile}25800}{215} = \frac{5160}{43} = 120 \text{ cm.}$$

Elimin pe I : $25 = 5^2 \quad 35 = 5 \times 7$

$C.m.m.m.c = 5^2 \times 7 = 25 \times 7 = 175$

$$\begin{cases} 224A + 175I = 54600 \\ \pm 120A \mp 175I = \mp 3000 \end{cases}$$

$$344A = 51600$$

$$6450 : 43 = 150$$
$$\begin{array}{l} 215 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$A = \frac{\overset{4}{\smile}51600}{344} = \frac{\overset{2}{\smile}12900}{86} = \frac{6450}{43} = 150 \text{ cm.}$$

Intre ultimele două ecuații elimin pe a, necunoscuta auxiliară introdusă.

$$\frac{l^2}{12} = 150^2 - 120^2$$

$$l^2 = 12 \times 10^2 (15^2 - 12^2) = 12 \times 10^2 \times 3^2 (5^2 - 4^2) =$$
$$= 2^2 \times 10^2 \times 3^5$$

$$l = 2 \times 10 \times 9\sqrt{3} = 180\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$\text{Vol.} = \frac{180^2 \times 3 \times 120\sqrt{3}}{12} = 180^2 \times 30\sqrt{3} =$$

$$= 32400 \times 30\sqrt{3} = 972000\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ 324 \end{array}$$

*

5. *Volumul unui con este de 2700 π dm³, iar înălțimea socotită în dm. satisface ecuației :*

$$\frac{x}{28} - \frac{3x-2}{392} - \frac{2x+5}{980} - 7 = \frac{39}{490} - \frac{x+7}{7}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să se găsească : 1º. Aria laterală a conului ; 2º. Unghiul la centru al sectorului rezultat din desfășurarea conului.

1º. Aria lat. $= \pi RG$, R fiind raza bazei, G, generatoarea conului. Necunoscutele problemei : R, G și necunoscuta ajutătoare I, înălțimea. Trebuesc 3 ecuații. Una este ecuația dată, în care se înlocuește x prin I.

Alta e dată de formula volumului conului, volumul fiind cunoscut :

$$\text{Vol.} = \frac{\pi R^2 I}{3}$$

A treia, se obține aplicând *teorema lui Pythagora* triunghiului dreptunghiu SOB : deci sistemul este :

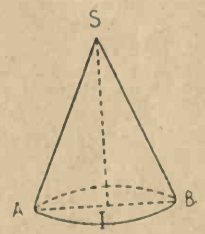

Fig. 12.

$$\begin{cases} \overset{70}{\frac{I}{28}} - \overset{5}{\frac{3I-2}{392}} - \overset{2}{\frac{2I+5}{980}} - 7 = \overset{4}{\frac{39}{490}} - \overset{280}{\frac{I+7}{7}} \\ \frac{\pi R^2 I}{3} = 2700\pi \\ G^2 = I^2 + R^2. \end{cases}$$

Prima ecuație neconținând decât necunoscuta I, o determină singură.

Elimin numitorii :

$28 = 2^2 \times 7$
$392 = 2^2 \times 7^2$
$980 = 2^2 \times 5 \times 7^2$
$490 = 2 \times 5 \times 7^2$
$7 = 7$

392	2^3
98	2
49	7^2
1	

$C.m.m.m.c = 2^3 \times 5 \times 7^2 = 980 \times 2 = 1960$

$$70I - 15I + 10 - 4I - 10 - 13720 = 156 - 280I - 1960$$

$$331I = 13876 - 1960$$
$$331I = 11916$$
$$I = \frac{11916}{331} = 36 \text{ dm.}$$

$11916 : 331 = 36$

1986	
0	

In ecuația a II-a simplificată cu π, se substitue I și se elimină numitorii :

$$12R^2 = 2700$$
$$R^2 = \frac{\overset{4}{\smile}}{\frac{2700}{12}} = \frac{675}{3} = 225$$
$$R = \sqrt{225} = 15 \text{ dm.}$$

$\sqrt{225}$	15	36
125	25	36
0	5	216
	125	108
		1296

$$G^2 = 36^2 + 15^2 = 1296 + 225 = 1521$$
$$G = \sqrt{1521} = 39 \text{ dm.}$$

$\sqrt{1521}$	39	39
621	69	15
0	9	195
	621	39
		585

Aria lat. $= 15 \times 39\pi = 585\pi \text{ dm}^2$

2^0 Tăind conul după o generatoare și așternându-l pe un plan, rezultă un sector circular cu raza egală cu generatoarea conului, cu aria egală cu aria laterală a conului.

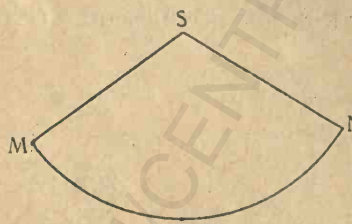

Fig. 13

Necunoscuta este numărul de grade al sectorului : n^0.

Ecuația pentru aflarea ei este formula ariei sectorului, deoarece aria, raza, sunt cunoscute.

Aria sect. $= \frac{\pi r^2 n}{360}$ dar $r = G$ Aria sect. = aria lat. con.

$$\frac{\pi G^2 n}{360} = \pi RG$$

$$n^0 = \frac{360R}{G} = \frac{360 \times \overset{3}{\overbrace{15}}}{39} = \frac{360 \times 5}{13} =$$

$$= \frac{1800}{13} = 138^0 \frac{6}{13}$$

$$\begin{array}{l} 1800 : 13 = 138 \\ \underline{50} \\ \underline{110} \\ \underline{\underline{\;=6}} \end{array}$$

6. *Se tae o sferă printr'un plan. Să se afle volumul conului, care are ca bază cercul de secţiune şi care e circumscris sferei în lungul acestui cerc, dacă o lungime de 27 ori cât raza sferii întrece o lungime de 52 de ori cât distanţa centrului de planul de secţiune cu 1820 dm; iar fracţiunea* $\frac{36}{65}$ *din raza sferei cuprinde de 5 ori fracţiunea* $\frac{7}{25}$ *din distanţa de centru a planului de secţiune şi mai rămân 4 dm.*

$$\text{Vol. con.} = \frac{\pi r^2 I}{3}$$

Necunoscutele sunt $MB = r$ $SM = I$.

Trebuesc două ecuaţii pentru a le determina. Una din ecuaţii se obţine aplicând *teorema lui Pythagora* triunghiului dreptunghiu OMB $r^2 + OM^2 = OB^2$ cu care se introduc 2 necunoscute noi: $OM = d$, distanţa planului de secţiune de centru, $OB = R$, raza sferii.

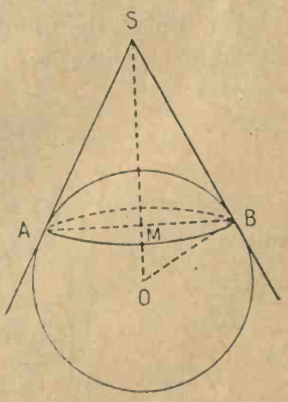

Fig. 14.

Trebuesc deci 4 ecuaţii pentru determinarea necunoscutelor: r, I, d, R.

Altă relaţie generală se află

aplicând triunghiului OSB, dreptunghiu în B teorema : Intr'un triunghiu dreptunghiu, înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este medie proporțională între segmentele determinate de ea pe ipotenuză : $r^2 = I.d$.

Afară de aceste relații geometrice generale, căutăm relații speciale problemei, din enunțiul problemei.

Se caută să se puie sub formă de expresiuni algebrice diferite cantități care intervin în problemă.

O lungime de 27 ori cât raza sferii : $27\ R$.

O lungime de 52 ori distanța de centru a planului de secțiune : $52\ d$.

O relație între aceste 2 expresii :

$$27R > 52d \qquad \text{anume :}$$

$$27R - 52d = 1820$$

Fracțiunea $\frac{36}{65}$ din raza sferei este de 36 ori a 65-a parte din rază, adică $36 \times \frac{R}{65} = \frac{36R}{65}$; fracțiunea $\frac{7}{25}$ din distanța centrului de planul de secțiune este de 7 ori a 25-a parte din d : $7 \times \frac{d}{25} = \frac{7d}{25}$.

Intre aceste 2 expresii există, după enunțiul problemei, relația dintre deîmpărțit, împărțitor, cât și rest într'o împărțire neexactă : $D = I \times C + R$, câtul fiind 5, restul 4 :

$$\frac{36R}{65} = 5 \times \frac{7d}{25} + 4$$

Deci, sistemul pentru determinarea celor 4 necunoscute este :

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 27R - 52d = 1820 \\ \\ \dfrac{36R}{65} - \dfrac{\overbrace{7d}^{13}}{5} = \overbrace{4}^{65} \end{array}\right. \\ r^2 + d^2 = R^2 \\ r^2 = Id \end{array}\right.$$

Primele 2 ecuații, neconținând decât 2 necunoscute, formează un sistem determinat, care se poate rezolvi.

Elimin numitorii în ecuația a doua. $C.m.m.m.c = 65$

$$\begin{array}{c|l} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 27R - 52d = 1820 \\ 36R - 91d = 260 \end{array} \right.$$

Intrebuințez *metoda reducerii*, fiindcă coeficienții au divizori comuni.

Elimin pe R.

$27 = 3^3 \quad 36 = 2^2 \times 3^2 \quad C.m.m.m.c = 3^3 \times 2^2 = 27 \times 4 = 108$

$$\left\{ \begin{array}{l} 108R - 208d = 7280 \\ 108R - 273d = 780 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} - \\ + \\ - \end{array}$$

$$65d = 6500$$

$$d = \frac{6500}{65} = 100 \text{ dm.}$$

Elimin pe d, tot *prin reducere*:

$52 = 2^2 \times 13 \quad 91 = 7 \times 13.$

$C.m.m.m.c = 2^2 \times 7 \times 13 = 91 \times 4 = 364.$

$$\left\{ \begin{array}{l} 189R - 364d = 12740 \\ 144R - 364d = 1040 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} - \\ + \\ - \end{array}$$

$$45R = 11700$$

$$R = \frac{\overset{9}{\smile}11700}{45} = \frac{1300}{5} = 260 \text{ dm.}$$

13
13
39
13
169

Ecuația a III-a dă valoarea lui r

$r^2 = 260^2 - 100^2 = 20^2(13^2 - 5^2) =$

$= 20^2(169 - 25) = 20^2 \times 144$

$r = 20\sqrt{144} = 20 \times 12 = 240$ dm.

$\sqrt{144} \mid 12$
$44 \mid 22$
$0 \mid 2$
44

Ecuația ultimă dă valoarea necunoscutei I.

$$I = \frac{r^2}{d} = \frac{240 \times 240}{100} = 24^2 = 576 \text{ dm.}$$

$$\text{Vol.} = \frac{\pi 240^2, 576}{3} = 57600 \times 192\pi =$$

11059200π dm^2.

	576
24	192
24	1152
96	5184
48	576
576	110592

Probleme de rezolvat.

GEOMETRIE PLANĂ ŞI ALGEBRĂ.

1. Un triunghiu dreptunghiu este astfel încât $\frac{1}{4}$ din cateta mare întrece cu 13 cm. fracţiunea $\frac{2}{5}$ din cateta mică. Acest triunghiu este asemenea cu altul ce are catetele de 12 cm şi 5 cm. Să se afle: *1°* Catetele primului triunghiu; *2°* Ipotenuza lui; *3°* Raza cercului ce are centrul în vârful unghiului drept al triunghiului şi e tangent la ipotenuză.

(*Răspuns*: *65 cm, 156 cm, 169 cm. 60 cm.*)

2. Raportul catetelor unui triunghiu dreptunghiu este egal cu $\frac{4}{3}$; iar fracţiunea $\frac{5}{6}$ din cateta mare întrece cu 24 cm fracţiunea $\frac{2}{9}$ din cateta mică. Să se găsească: *1°* catetele; *2°* ipotenuza; *3°* raza cercului înscris în triunghiul echilateral construit pe ipotenuză.

(*Răspuns*: *27 cm, 36 cm, 45 cm.*)

3. Raportul între ipotenuză şi o catetă a unui triunghiu dreptunghiu este egal cu $\frac{25}{24}$; iar fracţiunea $\frac{7}{10}$ din ipotenuză întrece cu 10 cm. fracţiunea $\frac{5}{8}$ din aceeaşi ca-

tetă. Să se găsească: *1°* Laturile triunghiului dreptunghiu; *2°* Raza cercului înscris în triunghiul echilateral construit pe cateta mică.

(*Răspuns*: *28 cm, 96 cm, 100 cm.*)

4. Într'un cerc, două coarde, ce subîntind arce suplimentare, sunt astfel că $\frac{3}{8}$ din coarda mare întrece cu 26 cm. fracțiunea $\frac{7}{5}$ dintr'o jumătate a coardei mici. Triunghiul format de aceste coarde și diametru este asemenia cu un triunghiu, ce are cele două laturi mai mici, egale cu 5 cm și 12 cm. Să se găsească: *1°* coardele; *2°* diametrul cercului; *3°* Înălțimile triunghiului.

(*Răspuns*: *312 cm, 130 cm, 338 cm*).

5. Se dă un cerc și un punct exterior situat la o depărtare de centru egală cu $\frac{5}{3}$ din rază. O șeptime din această depărtare întrece o cincime a razei cu 4 mm. Din punctul exterior se duc tangentele la cerc. Să se calculeze: *1°* Raza și distanța punctului de centru; *2°* Lungimea tangentelor de la punctul exterior la punctul de contact; *3°* Lungimea coardei ce unește punctele de contact.

6. Într'un triunghiu dreptunghiu, o catetă și proiecția ei pe ipotenuză sunt proporționale cu numerele 5, 4; iar o cincime din aceeaș catetă este cu 5 cm mai mare decât diferența dintre fracțiunile $\frac{4}{15}$ din ea și $\frac{3}{8}$ din proiecția ei pe ipotenuză. Să se găsească: *1°* laturile triunghiului dreptunghiu; *2°* raza cercului înscris în exagonul construit pe ipotenuză.

(*Răspuns*: *60 cm, 75 cm, 45 cm.....*)

7. Într'un triunghiu dreptunghiu, cele două catete sunt astfel că suma dintre $\frac{4}{9}$ din cateta mică și $\frac{5}{18}$ din

cea mare întrece cu 13 dm diferența dintre $\frac{3}{4}$ din cateta mare și $\frac{2}{3}$ din cea mică; iar produsul catetei mici prin 4 mărit cu de 17 ori cateta mare dă 720 dm. Să se afle: *1°* laturile triunghiului dreptunghiu; *2°* proiecțiile catetelor pe ipotenuză; *3°* latura unui exagon regulat echivalent cu dreptunghiul, ce are ca laturi proecțiile catetelor pe ipotenuză.

(*Răspuns*: *27 dm, 36 dm, 45 dm*).

8. Ariile unui triunghiu dreptunghiu și a unui exagon regulat sunt proporționale cu numerele 49 și $25\sqrt{3}$. Diferența dintre $\frac{8}{5}$ din aria triunghiului și produsul ariei exagonului prin $\sqrt{3}$ întrece cu 80 cm² fracțiunea $\frac{1}{15}$ din aria triunghiului. Să se afle: *1°* Ariile celor două poligoane; *2°* Laturile lor, dacă o catetă a triunghiului dreptunghiu este de 280 cm.

(*Răspuns*: $L_6 = 100$ *cm. 350 cm, 210 cm*).

9. Ariile unui triunghiu dreptunghiu și a unui triunghiu echilateral sunt proporționale cu numerele 243 și $50\sqrt{3}$: diferența dintre $\frac{3}{8}$ din aria triunghiului dreptunghiu și câtul ariei triunghiului echilateral prin $\sqrt{3}$ întrece cu 125 cm² fracțiunea $\frac{1}{6}$ din aria triunghiului dreptunghiu. Să se afle: *1°* Ariile celor două poligoane; *2°* Laturile lor, dacă o catetă a triunghiului dreptunghiu este de 360 cm.

(*Răspuns*: $L_3 = 200$ *cm*; *450 cm*; *270 cm*).

10. Cele două catete ale unui triunghiului dreptunghiu sunt proporționale cu numerele 5, 12; iar fracțiunea

$\frac{3}{13}$ din cateta mică întrece cu 7 dm fracțiunea $\frac{2}{39}$ din cateta mare. Să se afle: *1°* catetele; *2°* ipotenuza; *3°* latura exagonului regulat echivalent cu triunghiul dreptunghiu.

(*Răspuns*: *65 dm, 156 dm, 169 dm*).

11. Cele două catete ale unui triunghiu dreptunghiu sunt proporționale cu numerele 9 și 40: iar fracțiunea $\frac{4}{41}$ din cateta mică întrece cu 6 dm fracțiunea $\frac{3}{164}$ din cateta mare. Să se afle: *1°* catetele; *2°* ipotenuza; *3°* latura triunghiului echilateral echivalent cu triunghiul dreptunghiu.

(*Răspuns*: *369 dm, 1640 dm, 1681 dm*).

12. O catetă a unui triunghiu dreptunghiu, măsurată în dm satisface ecuația:

$$\frac{3x}{16} - \frac{5}{36} - \frac{x-6}{12} - \frac{2+3x}{6} = -\frac{85}{18}$$

iar cealaltă catetă este de 5 dm. Să se găsească: *1°* ipotenuza triunghiului dreptunghiu; *2°* latura unui triunghiu echilateral echivalent cu cercul circumscris triunghiului dreptunghiu.

(*Răspuns* $x = 12\,dm$)

13. Un arc de cerc are lungimea de 2π dm; iar numărul de grade corespunzător este astfel că dublul diferenței dintre $\frac{7}{12}$ din el și $\frac{1}{20}$ din el întrece cu 12^0 suma dintre $\frac{3}{5}$ din el și $\frac{11}{30}$ din el. Să se găsească: *1°* numărul de grade al arcului; *2°* raza cercului din care face parte arcul; *3°* aria figurii din același cerc, mărginită de două coarde care pleacă din același punct una egală cu latura exagonului regulat înscris, alta

egală cu latura triunghiului echilateral înscris și de arcul cuprins între ele.

(*Răspuns*: *1⁰ 120⁰; 2⁰) 3 dm*)

14. Raza unui cerc este astfel că fracțiunea $\frac{5}{12}$ din ea întrece cu 11 cm fracțiunea $\frac{3}{16}$ din ea. Să se găsească aria segmentului circular mărginit de latura triunghiului echilateral înscris în cerc.

(*Răspuns*: *R = 48 cm*)

15. Aria figurii, mărginită de două coarde paralele, una egală cu latura patratului înscris în cerc, alta cu latura triunghiului echilateral înscris și arcele cuprinse între ele, este astfel că a treia parte din diferența dintre $\frac{7}{15}$ din ea și $\frac{5}{12}$ din ea este de 79 cm². Să se găsească: *1⁰* aria figurii; *2⁰* raza cercului din care face parte figura. (*Răspuns*: *1⁰. 4740 cm²*)

GEOMETRIE IN SPAȚIU ȘI ALGEBRĂ.

1. Cele trei dimensiuni ale unui paralelipiped dreptunghiu sunt proporționale cu numerele 2, 5, 7, suma lor fiind de 112 cm. Să se găsească volumul paralelipipedului. (*Răspuns*: *35840 cm³*)

2. Cele 3 dimensiuni ale unui paralelipiped dreptunghiu sunt invers proporționale cu numerele 3, 6, 4, suma lor fiind 180 cm. Să se găsească aria totală a paralelipipedului. (*Răspuns*: *20800 cm²*)

3. Un paralelipiped dreptunghiu are dimensiunile proporționale cu numerele 3, 4, 12, suma lor fiind 95 cm. Să se găsească diagonala paralelipipedului.

(*Răspuns*: *65 cm*)

4. Într'un paralelipiped dreptunghiu cu baza un pătrat, fracțiunea $\frac{5}{36}$ din aria sa laterală întrece cu 18 cm² fracțiunea $\frac{17}{24}$ din aria bazei sale; iar o pânză, care ar acoperi de 34 de ori baza, ar acoperi numai de 5 ori aria laterală și ar mai rămâne 576 cm². Să se găsească volumul și diagonala paralelipipedului.

(*Răspuns*: *aria laterală 864 m²*; *aria bazei 144 cm²*

5. Într'un paralelipiped dreptunghiu, suma dintre fracțiunea $\frac{5}{28}$ din lungime și fracțiunea $\frac{25}{336}$ din lățime întrece diferența dintre fracțiunea $\frac{15}{112}$ din jumătatea perimetrului și fracțiunea $\frac{13}{16}$ dintr'o treime a lungimii cu 13 cm; iar o sfoară care cuprinde de 53 de ori lungimea, coprinde lățimea 70 de ori și mai rămân 24 cm. Să se afle dimensiunile bazei paralelipipedului. Să se afle aria laterală și diagonala paralelipipedului, știind că raportul dintre volumul acestui paralelipiped și a unui tetraedru regulat cu muchia de 144 cm este de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(*Răspuns*: *48 cm, 36 cm, 144 cm*).

6. Volumul unei prisme drepte cu baza un exagon regulat este de 2 m³ și înălțimea ei de 2 m. Să se calculeze latura exagonului de bază.

7. Într'un vas de forma unei prisme triunghiulare regulate se află apă $\frac{3}{8}$ din capacitatea sa. Se mai toarnă apoi $\frac{7}{15}$ din partea rămasă goală și încă 40 litri pentru

a se umplea vasul. Să se calculeze capacitatea vasului și latura poligonului de bază, dacă înălțimea vasului este de 12 dm.

(*Răspuns*: *120 litri*).

8. Într'un vas de forma unei prisme exagonale regulate se află apă $\frac{5}{9}$ din capacitatea sa. Se mai toarnă apoi $\frac{8}{15}$ din partea rămasă goală și încă 56 litri pentru a se umplea vasul. Să se calculeze capacitatea vasului și latura poligonului de bază, dacă înălțimea vasului este de 27 dm.

(*Răspuns*: *270 litri*)

9. Un paralelipiped dreptunghiu are lungimea de 28cm, lățimea de 21cm și diagonala de 91cm. Să i se afle volumul. Volumul acestui paralelipiped și volumul unei prisme triunghiulare regulate sunt proporționale cu numerele 16 și $5\sqrt{3}$. Să se afle volumul prismei triunghiulare. Să se afle latura triunghiului de bază, dacă înălțimea prismei este egală cu diagonala bazei paralelipipedului dreptunghiu.

(*Răspuns*: $L_3 = 42\ cm$).

10. Un paralelipiped dreptunghiu are lungimea de 24cm, înălțimea de 72cm și diagonala de 78cm. Să i se afle volumul. Volumul acestui paralelipiped și volumul unei prisme exagonale regulate sunt proporționale cu numerele 8 și $15\sqrt{3}$. Să se afle volumul prismei exagonale. Să se afle latura exagonului de bază, dacă înălțimea prismei este egală cu diagonala bazei paralelipipedului dreptunghiu.

(*Răspuns*: $L_6 = 36\ cm$).

11. Să se afle volumul unei prisme exagonale regulate dacă latura bazii este de 10cm; iar înălțimea întrece

cu 35cm diferența dintre $\frac{4}{9}$ din ea și fracțiunea $\frac{5}{12}$ din ea.

(*Răspuns*: $I = 36$ *cm*)

12. Dintr'un vas, în care se găsește apă $\frac{3}{8}$ din capacitatea sa, se scoate cu 1 litru mai mult decât fracțiunea $\frac{2}{9}$ din cantitatea de apă din vas; se adaogă apoi $\frac{5}{6}$ din partea rămasă goală și încă 3 litri pentru a umplea vasul. Dacă vasul are forma unei prisme exagonale regulate cu înălțimea de 16dm, să se găsiască aria laterală a vasului.

(*Răspuns*: *Vol.* $= 24\ dm^3$).

13. Dintr'un vas, în care se găsește apă $\frac{4}{9}$ din capacitatea sa, se scoate cu 5 litri mai puțin decât fracțiunea $\frac{5}{8}$ din cantitatea de apă din vas; se adaogă apoi $\frac{7}{10}$ din partea rămasă goală și încă 12 litri pentru a umplea vasul. Dacă vasul are forma unei prisme triunghiulare regulate cu înălțimea de 36 dm, să se găsiască aria laterală a vasului.

(*Răspuns*: *Vol.* $= 54\ dm^3$).

14. Un turn de forma unei prisme triunghiulare regulate este astfel încât după ce urci $\frac{2}{5}$ din înălțimea lui și apoi cobori $\frac{3}{16}$ din înălțimea urcată, trebue să mai urci $\frac{2}{9}$ din restul înălțimei ca să ajungi cu 4 metri mai jos decât jumătatea înălțimei lui. Să se afle suprafața pereților turnului dacă în turn încap $\frac{3200}{\sqrt{3}}$ m^3 de aer.

(*Răspuns*: $I = 160\ m$).

15. Să se calculeze volumul unui tetraedru regulat cu muchia de 1 m.

16. Un triunghiu echilateral are latura egală cu ipotenuza unui triunghiu dreptunghiu cu catetele de 8 dm și 15 dm. Să se afle latura triunghiului echilateral. Se unesc mijloacele laturilor triunghiului echilateral și se îndoaie figura în lungul dreptelor care unesc mijloacele laturilor până când jumătățile de laturi se suprapun. Să se afle volumul corpului astfel format.

17. Aria totală a unui tetraedru regulat este de $225\sqrt{3}\,dm^2$. Să se găsească volumul tetraedrului.

(*Răspuns*: $281{,}25\sqrt{2}\ dm^3$)

18. Să se găsiască volumul unui tetraedru regulat dacă fracțiunea $\frac{4}{7}$ dintr'o cincime a muchiei lui întrece cu 13 cm, suma dintre $\frac{1}{56}$ parte a perimetrului bazei și a $\frac{1}{70}$ parte a muchiei.

(*Răspuns*: *muchia 280 cm*)

19. Să se găsiască volumul unui tetraedru regulat dacă fracțiunea $\frac{2}{3}$ dintr'o șeptime a muchiei lui întrece cu 1 cm suma dintre fracțiunea $\frac{1}{42}$ din perimetrul bazei și $\frac{1}{63}$ din muchie.

(*Răspuns*: *muchia este 260 cm*)

20. Să se calculeze volumul unui tetraedru regulat, dacă suma ariilor patratelor construite pe înălțimea tetraedrului, pe muchia lui și pe apotema lui este de $87\ cm^2$.

(*Răspuns*: *muchia este 6 cm*)

21. Să se afle volumul unui tetraedru regulat dacă fracțiunea $\frac{7}{36}$ din înălțime întrece fracțiunea $\frac{5}{12}$ din sfertul înălțimei cu 65 mm.

(*Răspuns*: *Înălțimea este 720 mm*)

22. Să se afle volumul unui tetraedru regulat dacă raza cercului circumscris triunghiului de bază în cm satisface ecuației:

$$\frac{2x}{15} - \frac{3x-4}{25} - \frac{5x+2}{9} + \frac{7}{45} = -\frac{4x+323}{75}$$

(*Răspuns*: $R = 9$ *cm.*)

23. Să se afle volumul unui tetraedru regulat dacă apotema bazii în cm satisface ecuației:

$$\frac{3x}{21} - \frac{4x+3}{49} - \frac{2x-5}{9} + \frac{2}{63} = -\frac{5x+72}{147}$$

(*Răspuns*: $a_3 = 8$ *cm.*)

24. Să se afle volumul unei piramide regulate cu baza un trunghiu echilateral cu latura de 2 cm și muchia de 5 cm.

25. Volumul unei piramide triunghiulare regulate este de 1 m³. Să se calculeze latura triunghiului de bază, dacă înălțimea piramidei este $\frac{1}{\sqrt{3}}$ m.

26. Intr'o piramidă triunghiulară regulată, raportul dintre înălțime și muchie este de $\frac{12}{13}$. Muchia este de 39 cm. Să se calculeze: *1°* înălțimea; *2°* raza cercului circumscris triunghiului de bază; *3°* Latura triunghiului; *4°* Volumul piramidei; *5°* aria laterală a piramidei.

(*Răspuns*: $I = 36$ *cm.* $R = 15$ *cm*).

27. Intr'o piramidă exagonală regulată, apotema ei și înălțimea sunt proporționale cu numerele 17 și 15; înălțimea este de 45 cm. Să se calculeze: 1^0 apotema piramidei; 2^0 apotema exagonului de bază; 3^0 latura exagonului; 4^0 volumul piramidei; 5^0 aria laterală a piramidei.

(*Răspuns*: $A = 51$ cm $\quad a = 24$ cm).

28. Aria laterală a unei piramide triunghiulare regulate este de 630 dm^2, iar apotema piramidei este de 14dm. Să se găsiască volumul piramidei.

(*Răspuns*: $l_3 = 30\,dm \quad I = 11\,dm$).

29. Să se afle volumul unei piramide exagonale regulate, dacă apotema ei este de 37 cm, iar apotema bazii de 12 cm.

(*Răspuns*: $I = 35\,cm$; $l_6 = 8\sqrt{3}\,cm$)

30. Să se afle volumul unei piramide triunghiulare regulate, dacă apotema ei este de 89cm, iar apotema bazei de 39 cm.

(*Răspuns*: $I = 80\,cm$; $l_3 = 78\sqrt{2}$)

31. Volumul unei piramide exagonale regulate este de $3360\sqrt{3}$ cm^3 și înălțimea ei de 35cm. Să se afle aria laterală a piramidei.

(*Răspuns*: $L_6 = 8\sqrt{3}\,cm$; $A = 37\,cm$)

32. Volumul unei piramide triunghiulare regulate este de $121680\sqrt{3}$ cm^3 și înălțimea ei este de 80 cm. Să se afle aria laterală a piramidei.

(*Răspuns*: $l_3 = 78\sqrt{3}\,cm$; $A = 89\,cm$)

33. Muchia unei piramide exagonale regulate este de 85 cm și apotema piramidei de 84 cm. Să se găsiască volumul piramidei.

34. Să se afle volumul unei piramide exagonale regulate dacă aria bazei este de $50\sqrt{3}\,dm^2$, iar aria laterală a piramidei de $130\sqrt{3}\,dm^2$.

† 35. Volumul unei piramide exagonale regulate este de $18750\sqrt{3}\,dm^3$, iar înălțimea piramidei este de 60 dm. Să se afle aria laterală a piramidei triunghiulare regulate, care are acelaș vârf ca piramida exagonală, iar baza este circumscrisă cercului, în care este înscrisă baza primei piramide.

36. Volumul unei piramide triunghiulare regulate este de $9375\sqrt{3}\,dm^3$; înălțimea piramidei este de 60 dm. Să se afle aria laterală a piramidei exagonale regulate, care are acelaș vârf ca piramida triunghiulară, iar baza este circumscrisă cercului, în care e înscrisă baza primei piramide.

37. Să se calculeze volumul unei piramide triunghiulare regulate, dacă apotema ei este astfel că $\frac{3}{5}$ din ea întrece fracțiunea $\frac{2}{15}$ din jumătatea ei cu 8dm, iar aria laterală a piramidei este de $189\sqrt{3}\,dm^2$.

38. Să se calculeze aria laterală a unei piramide exagonale regulate, dacă înălțimea ei este astfel că $\frac{5}{12}$ din ea întrece cu 3,2 cm fracțiunea $\frac{3}{5}$ din sfertul ei, iar volumul este de $200\sqrt{3}\,cm^3$.

(*Răspuns*: $I = 12\,cm$, $a = 5\,cm$, $A = 13\,cm$).

39. Intr'o piramidă exagonală regulată, fracțiunea $\frac{4}{45}$ din înălțimea piramidei, mărită cu fracțiunea $\frac{7}{30}$ din

apotema piramidei, dă 43 cm; iar o lungime de 15 ori mai mare ca apotema piramidei întrece cu 990 cm o lungime de 14 ori mai mare ca înălțimea piramidei. Să se găsiască volumul piramidei.

(*Răspuns*: $A = 150$ *cm.* $I = 90$ *cm*).

40. Intr'o piramidă exagonală regulată, fracțiunea $\frac{7}{9}$ din apotema bazei întrece cu 15 cm. fracțiunea $\frac{7}{15}$ din apotema piramidei; iar o lungime de 9 ori cât apotema piramidei, coprinde apotema bazei de 14 ori și mai rămân 45cm. Să se găsiască volumul piramidei.

(*Răspuns*: $A = 75$. $a = 45$ *cm*).

41. Intr'o piramidă triunghiulară regulată, fracțiunea $\frac{7}{18}$ din apotema piramidei întrece cu 8cm fracțiunea $\frac{3}{8}$ din apotema bazei; iar o lungime de 35 de ori cât apotema piramidei coprinde apotema bazei de 36 ori și mai rămân 558cm. Să se găsiască volumul piramidei.

(*Răspuns*: $A = 90$ *cm.* $a = 72$ *cm*).

42. Intr'un paralelipiped dreptunghiu, fracțiunea $\frac{7}{24}$ din lungime întrece cu 12 cm fracțiunea $\frac{65}{198}$ din lățime; iar o sfoară lungă de 99 de ori lungimea paralelipipedului, coprinde lățimea de 130 de ori și încă 396 cm. Volumul acestui paralelipiped și volumul unei piramide triunghiulare regulate sunt proporționale cu numerele 12 și $5\sqrt{3}$. Să se afle dimensiunile paralelipipedului și diagonala lui, dacă înălțimea piramidei este de 1320 cm și latura bazei de 396 cm.

(*Răspuns*: $L = 264$ cm, $l = 198$ cm. $I = 792$ cm).
$D = 858$ cm.)

43. Într'un paralelipiped dreptunghiu, fracțiunea $\frac{55}{126}$ din lățime întrece cu 28 cm fracțiunea $\frac{9}{56}$ din lungime; iar o sfoară lungă de 88 de ori lățimea paralelipipedului, coprinde lungimea de 63 de ori și încă 504cm. Volumul acestui paralelipiped și volumul unei piramide exagonale regulate sunt proporționale cu numerele 4 și $5\sqrt{3}$. Să se afle dimensiunile paralelipipedului și diagonala lui, dacă înălțimea piramidei este de 420 cm și latura bazei de 252 cm.

(*Răspuns*: $L = 168$ *cm.* $l = 126$ *cm.* $I = 504$ *cm.* $D = 546$ *cm*).

44. Un cilindru are aria totală egală cu 450π dm², iar raza și înălțimea sunt proporționale cu numerele 4 și 5. Să se găsiască volumul cilindrului.

45. Un cilindru circular drept are volumul de 3240π dm³ și înălțimea de 10dm. Să se găsiască volumul prismei exagonale regulate înscrisă în cilindru. Volumul acestei prisme și volumul unui paralelipiped dreptunghiu sunt proporționale cu numerele $5\sqrt{3}$ și 4. Să se găsiască volumul paralelipipedului dreptunghiu. Să se găsiască diagonala paralelipipedului, știind că lungimea lui este de 12dm și lățimea de 9dm.

(*Răspuns*: $R = 18$ *dm.* $D = 39$ *dm.*).

46. Un cilindru circular drept are volumul de 5120π dm³ și înălțimea de 20dm. Să se găsiască volumul prismei triunghiulare regulate înscrisă în cilindru. Volumul acestei prisme și volumul unui paralelipiped dreptunghiu sunt proporționale cu numerele $5\sqrt{3}$ și 12. Să se găsiască volumul paralelipipedului. Să se găsiască diagonala lui, știind că lungimea este de 16dm și înălțimea de 48 dm.

(*Răspuns*: $R = 16$ *dm.* $D = 52$ *dm*).

47. Să se calculeze volumul unui cilindru dacă suma dintre înălțime și rază este de 5m; iar aria totală a lui este de $31{,}4\,m^2$.

48. Volumul unui con este de $21600\pi\,cm^3$, iar înălțimea este de 72cm. Să se calculeze: 1^0 aria laterală a conului; 2^0 volumul piramidei exagonale regulate, ce are drept bază exagonul înscris în cercul de bază a conului și ca vârf, vârful conului.

(*Răspuns*: $R = 30\,cm.$ $G = 78\,cm$).

49. Un paralelipiped dreptunghiu are lungimea de 16cm. lățimea de 12 cm și diagonala de 52 cm; un con are generatoarea de 65 cm. Să se afle: 1^0 înălțimea paralelipipedului; 2^0 aria laterală a conului, dacă această arie și aria totală a paralelipipedului dreptunghiu sunt proporționale cu numerile: 65π și 192; 3^0 volumul conului.

(*Răspuns*: $I = 48\,cm.$ $R = 16\,cm.$)

50. Un tetraedru regulat are muchia de 42cm; un con are înălțimea de 45cm. Să se afle: 1^0 volumul tetraedrului; 2^0 Volumul conului, dacă volumul tetraedrului și volumul conului sunt proporționale cu numerile: $21\sqrt{2}$ și 40π; 3^0 Aria laterală a conului.

51. Un triunghiu dreptunghiu are catetele de 510cm și 680cm. Să se afle volumul corpului născut prin rotația triunghiului în jurul ipotenuzei.

52. O piramidă triunghiulară regulată are înălțimea de 36cm și apotema bazei de 15 cm. Să se găsiască aria totală a piramidei și cea laterală a conului ce are același vârf ca piramida și ca bază cercul circumscris triunghiului.

53. Aria laterală a unui con este de $15\pi\,dm^2$; desfășurată pe un plan dă un sector al cărui unghiu la centru este de 216^0. Să se afle volumul conului.

54. O piramidă triunghiulară regulată are acelaș vârf cu un con, iar baza sa este înscrisă în baza conului. Conul desfășurat pe un plan dă un sector al cărui arc de 288° are lungimea de 64π dm. Să se calculeze: 1° generatoarea conului; 2° raza conului; 3° înălțimea conului; 4° aria totală a piramidei.

(*Răspuns*: $G = 40$ dm. $r = 32$ dm. $I = 24$dm).

55. O piramidă exagonală regulată are același vârf ca un con, iar baza sa e înscrisă în cercul de bază al conului. Conul desfășurat pe un plan dă un sector de 288° cu aria de 1280π dm^2. Să se calculeze: 1° generatoarea conului; 2° raza conului; 3° înălțimea conului; 4° aria totală a piramidei.

56. Într'un con circular de revoluție, triunghiul format de înălțime, generatoare și rază este asemenia cu un triunghiu dreptunghiu a cărui catete sunt de 84 dm și 13dm, raportul de asemănare fiind 3. Să se găsiască aria laterală și volumul conului.

57. Un sector circular are unghiul dela centru de 216° și aria de 4860π cm^2. Cu acest sector se formează un con circular de revoluție. Să i se calculeze generatoarea, raza bazei și volumul.

(*Răspunsul*: $G = 90$ cm. $r = 54$ cm. $I = 72$ cm).

58. Un sector circular are unghiul de la centru de 216° și aria de 3840π cm^2. Cu acest sector se formează un con de revoluție. Să i se calculeze: generatoarea, raza bazei și volumul.

(*Răspuns*: $G = 80$ cm. $r = 48$ cm. $I = 64$ cm).

59. Să se găsiască volumul unui tetraedru regulat, dacă muchia sa este medie proporțională între muchia unui cub și generatoarea unui con. Cubul are diagonala de $48\sqrt{3}$ cm; iar conul are volumul de 40500π cm^3 și înălțimea de 60 cm.

(*Răspuns*: $m = 60$ cm).

60. Să se găsiască volumul unui tetraedru regulat, dacă muchia sa este medie proporțională între înălțimea unui paralelipiped dreptunghiu și înălțimea unui con. Paralelipipedul dreptunghiu are lungimea de 16 cm, lățimea de 12 cm și diagonala de 52 cm; iar conul are aria laterală de 1620π cm^2 și raza de 36 cm.

(*Răspuns*: $m = 36$ *cm*).

61. Să se calculeze volumul unui con, știind că suma dintre diametru și înălțime este de 10 m; iar îndoitul înălțimei este cu 1m mai mic decât întreitul razei.

62. Intr'un con de revoluție, fracțiunea $\frac{5}{18}$ din generatoare întrece cu 9 cm fracțiunea $\frac{8}{27}$ din raza; iar o lungime de 36 de ori mai mare ca raza este cu 306 cm mai mică decât o lungime de 25 de ori ca generatoarea. Să se afle volumul piramidei triunghiulare regulate, care are același vârf ca conul, iar baza este circumscrisă cercului de bază al conului.

(*Răspuns*: $G = 90$ *cm*. $R = 54$ *cm*. $I = 72$ *cm*.)

63. Intr'un con circular drept, fracțiunea $\frac{7}{12}$ din generatoare întrece cu 13 cm fracțiunea $\frac{11}{18}$ din rază; iar o lungime de 33 de ori mai mare ca raza este cu 912 cm mai mică decât o lungime de 35 de ori mai mare ca generatoarea. Să se afle volumul piramidei exagonale regulate care are același vârf ca conul și baza, circumscrisă cercului de bază al conului.

(*Răspuns*: $G = 60$ *cm*. $R = 36$ *cm*. $I = 48$ *cm*).

64. Intr'o piramidă triunghiulară regulată, fracțiunea $\frac{4}{15}$ din apotema bazei întrece fracțiunea $\frac{5}{84}$ din înălțimea

piramidei cu 13 cm; iar o lungime de 15 ori cât înălțimea piramidei coprinde apotema bazei de 28 de ori și mai rămân 840 cm. Să se afle aria laterală a piramidei. Această arie și aria laterală a unui con sunt proporționale cu numerile $15\sqrt{3}$ și π. Să se găsiască aria laterală a conului și unghiul la centru al sectorului rezultat din desfășurarea conului, dacă generatoarea conului este de 126cm.

(*Răspuns*: $a = 105$ *cm.* $I = 252$ *cm.* $A = 273$ *cm.* $n^0 = 130^0$)

65. Un tetraedru regulat și un con au volumele proporționale cu numerile $3\sqrt{2}$ și 2π. Să se afle aria laterală a conului și unghiul la centru al sectorului rezultat din desfășurarea conului dacă, diferența dintre fracțiunea $\frac{125}{2268}$ din muchia tetraedrului și $\frac{5}{216}$ din înălțimea conului întrece cu 1 cm. fracțiunea $\frac{4}{189}$ din sfertul perimetrului bazei tetraedrului; iar o furnică, care ar face 7cm pe secundă ar înconjura baza teatraedului într'un timp mai lung cu 4 secunde decât acela pe care l-ar întrebuința la urcarea înălțimei conului, dacă în urcare ar face 2 cm pe secundă.

(*Răspuns*: *muchia tetraedrului, 42 cm; înălțimea conului 28 cm*)

66. Să se calculeze volumul unui trunchiu de con care are aria laterală de $48720\,\pi$ cm^2, generatoarea de 290 cm, iar razele sunt astfel că suma dintre $\frac{5}{24}$ din raza mare și $\frac{7}{20}$ din raza mică întrece fracțiunea $\frac{11}{24}$ din diferența razelor cu 9 cm.

(*Răspuns*: $R = 108$ *cm.* $r = 60$ *cm.* $I = 286$ *cm*).

67. Să se calculeze volumul unui trunchiu de con, care are aria laterală de $33280\,\pi\,cm^2$, generatoarea de 130 cm, iar razele sunt astfel că suma dintre fracția $\frac{7}{72}$ din raza mare și $\frac{3}{28}$ din raza mică întrece fracțiunea $\frac{9}{16}$ din diferența razelor cu 8 cm.

(*Răspuns*: $R = 144\,cm$; $r = 112\,cm$; $I = 126\,cm$)

68. Un con circumscris unei sfere are generatoarea de 375 cm și distanța vârfului de centrul sferii de 625 cm. Să se găsiască: 1^0 volumul conului, care are ca bază cercul de tangență; 2^0 volumul conului complect circumscris la sferă (planul bazei, tangent la sferă).

(*Răspuns*: 1^0 $6750\,\pi\,dm^3$)

69. Un con circumscris la o sferă are vârful la depărtarea de 175 mm. de centrul sferei și de 112 mm. de planul cercului de intersecție (de tangență). Să se afle: 1^0 aria laterală a conului a cărui bază este cercul de tangență; 2^0 aria laterală a conului complect circumscris la sferă.

(*Răspuns*: 1^0 $11760\,\pi\,mm^2$)

70. Se tae o sferă printr'un plan la distanța de 3 cm. de centrul sferii. Să se afle aria sferii, dacă aria triunghiului echilateral înscris în cercul de secțiune este de $12\sqrt{3}\ cm^2$.

(*Răspuns*: $100\,\pi\,cm^2$)

71. Să se tae o sferă printr'un plan. Să se afle volumul conului, care are ca bază cercul de secțiune și e circumscris sferii în lungul acestui cerc, dacă raza sferii este de 65 dm, iar distanța de centru a planului de secțiune, socotită în dm. satisface ecuației:

$$\frac{3x-4}{75} - \frac{2x-3}{135} = \frac{464}{675} - \frac{x-5}{225}$$

(*Răspuns*: $d = 25\,dm$).

CLASA A V-a

A L G E B R Ă

Probleme rezolvate.

1. *Să se calculeze pentru* $x=y$ *valorile expresiunilor*:

$$f_1(xy) = \frac{3x^3-(3y+4)x^2+4(y+1)x-4y}{3x^3-(3y+4)x^2+(4y-4)x+4y}$$

$$f_2(xy) = \frac{2x^4+(-4y+1)x^3+(2y^2-2y-9)x^2+(y^2+18y)x-9y^2}{x^4-(2y+7)x^3+(y^2+14y+10)x^2-(7y^2+20y)x+10y^2}$$

$$f_3(xy) = \frac{x^4-(2y+1)x^3+(y^2+2y-1)x^2+(-y^2+2y)x-y^2}{3x^3-(3y+13)x^2+(13y-10)x+10y}$$

Fie $f_1(y)$, $f_2(y)$, $f_3(y)$ *aceste valori*; *să se calculeze expresia algebrică*:

$$f_1(y)-f_2(y)+f_3(y)$$

şi valoarea ei numerică pentru $y=2$.

$$f_1(y) = \frac{3y^3-(3y+4)y^2+4(y+1)y-4y}{3y^3-(3y+4)y^2+(4y-4)y+4y} = \frac{0}{0}$$

Fracţia se prezintă sub formă nedeterminată, nedeterminare provenită din faptul că atât numărătorul cât şi numitorul sunt divizibili prin $x-y$, de oarece se anulează pentru $x=y$, după teorema: Un polinom în x este divizibil printr'un binom de forma $x-a$, dacă valoarea polinomului este zero pentru $x=a$; aici $x=y$. Descompun atât numărătorul cât şi numitorul în 2 factori, dintre care unul este $x-y$, prin împărţire:

$$\begin{array}{l|l}
3x^3-(3y+4)x^2+4(y+1)x-4y & x-y \\ \cline{2-2}
\qquad -4x^2+4(y+1)x & 3x^2-4x+4 \\ \cline{1-1}
\qquad\quad / \quad / \quad 4x-4y & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
3x^3-(3y+4)x^2+(4y-4)x+4y & x-y \\ \cline{2-2}
\qquad -4x^2+(4y-4)x & 3x^2-4x-4 \\ \cline{1-1}
\qquad\quad / \quad / \quad -4x+4y & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

$$f_1(xy)=\frac{(x-y)(3x^2-4x+4)}{(x-y)(3x^2-4x-4)}=\frac{3x^2-4x+4}{3x^2-4x-4}$$ prin simplificare.

$$f_1(y)=\frac{3y^2-4y+4}{3y^2-4y-4}$$

$$f_2(y)=\frac{2y^4+(-4y+1)y^3+(2y^2-2y-9)y^2+(y^2+18y)y-9y^2}{y^4-(2y+7)y^3+(y^2+14y+10)y^2-(7y^2+20y)y-10y^2}=\frac{0}{0}$$

Nedeterminare provenită din cauză că atât numărătorul cât şi numitorul sunt divizibili prin $x-y$.

Descompun ambii termeni în 2 factori, dintre care unul este $x-y$ şi celălat câtul împărţirii corespunzătoare.

$$\begin{array}{l}
2x^4+(-4y+1)x^3+(2y^2-2y-9)x^2+(y^2+18y)x-9y^2 : x-y = \\
\qquad (-2y+1)x^3+(2y^2-2y-9)x^2 \\
\qquad\qquad\qquad -(y+9)x^2+(y^2+18y)x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 9y\,x-9y^2
\end{array}$$

$$=2x^3+(-2y+1)x^2-(y+9)x+9y$$

$$\begin{array}{l}
x^4-(2y+7)x^3+(y^2+14y+10)x^2-(7y^2+20y)x+10y^2 : x-y = \\
\qquad -(y+7)x^3+(y^2+14y+10)x^2 \\
\qquad\qquad\qquad (7y+10)x^2-(7y^2+20y)x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -10yx+10y^2
\end{array}$$

$$=x^3-(y+7)x^2+(7y+10)x-10y$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$f_2(xy) = \frac{(x-y)\left[2x^3+(-2y+1)x^2-(y+9)x+9y\right]}{(x-y)\left[x^3-(y+7)x^2+(7y+10)x-10y\right]} =$$

$$= \frac{2x^3+(-2y+1)x^2-(y+9)x+9y}{x^3-(y+7)x^2+(7y+10)x-10y}$$

și deci :

$$f_2(y) = \frac{2y^3+(-2y+1)y^2-(y+9)y+9y}{y^3-(y+7)y^2+(7y+10)y-10y} = \frac{0}{0}$$

Fracțiunea se prezintă încă în formă nedeterminată. Impart încă odată ambii termeni prin $x-y$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+(-2y+1)x^2-(y+9)x+9y & x-y \\ \underline{x^2-(y+9)x} & \hline 2x^2+x-9 \\ -9x+9y & \\ \underline{-9x+9y} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-(y+7)x^2+(7y+10)x-10y & x-y \\ \underline{7x^2+(7y+10)x} & \hline x^2-7x+10 \\ 10x-10y & \\ \underline{10x-10y} & \\ 0 & \end{array}$$

Deci :

$$f_2(xy) = \frac{2x^2+x-9}{x^2-7x+10} \quad \text{de unde} \quad f_2(y) = \frac{3y^2+y-9}{y^2-7y+10}$$

$$f_3(y) = \frac{y^4-(2y+1)y^3+(y^2+2y-1)y^2+(-y^2+2y)y-y^2}{3y^3-(3y+13)y^2+(13y-10)y+10y} = \frac{0}{0}$$

nedeterminare.

Impart ambii termeni prin divizorul comun $x-y$:

$$\begin{array}{r|l} x^4-(2y+1)x^3+(y^2+2y+1)x^2+(-y^2+2y)x-y^2 & x-y \\ \underline{-(y+1)x^3+(y^2+2y+1)x^2} & \hline x^3-(y+1)x^2+ \\ (y-1)x^2+(-y^2+2y)x & +(y-1)x+y \\ \underline{yx-y^2} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3-(3y+13)x^2+(13y-10)x+10y & x-y \\ \hline -13x^2+(13y-10)x & 3x^2-13x-10 \\ \hline -10x+10y & \\ \hline \end{array}$$

$$f_3(xy)=\frac{x^3-(y+1)x^2+(y-1)x+y}{3x^2-13x-10}$$

$$f_3(y)=\frac{y^3-(y+1)y^2+(y-1)y+y}{3y^2-13y-10}=\frac{0}{3y^2-13y-10}=0$$

$$f_1(y)-f_2(y)+f_3(y)=\frac{\overbrace{3y^2-4y+4}^{y-5}}{3y^2-4y-4}-\frac{\overbrace{2y^2+y-9}^{3y+2}}{y^2-7y+10}$$

Pentru a scădea două fracții, trebuesc aduse la acelaș numitor. Numitorul comun va fi cel mai simplu multiplu comun al numitorilor, care se calculează, descompunând numitorii în factori simpli, adică numere prime sau binoame de gr. I.

Polinomul $3y^2-4y-4$ se divide printr'un binom de forma $y-a$, dacă valoarea polinomului pentru $y=a$ este zero. Este necesar, dacă a e întreg să fie divizor al ultimului termen. Deci ar trebui încercat divizorii $y-2$, $y+2$, $y-1$, $y+1$, $y\pm 4$.

Pentru $y=2$, valoarea polinomului este:

$3\times 4-4\times 2-4=0$ deci $3y^2-4y-4$ este divizibil prin $y-2$

$3y^2-4y-4=(y-2)(3y+2)$.

De asemenia se constată că polinomul $y^2-7y+10$ este divizibil prin $y-2$, celălalt factor găsindu-se prin împărțire. Descompunerea în factori se poate încă face găsindu-se rădăcirile trinoamelor; în cazul $y^2-7y+10=0$.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}; \; y' = 2; \; y'' = 5$$

deci

$$y^2 - 7y + 10 = (y-2)(y-5).$$

$$C.m.m.m.c. = (y-2)(y-5)(3y+2).$$

$$f_1(y) - f_2(y) = \frac{(3y^2-4y+4)(y-5) - (2y^2+y-9)(3y+2)}{(y-2)(y-5)(3y+2)} =$$

$$= \frac{-3y^3-26y^2+49y-2}{(y-2)(y-5)(3y+2)}$$

$$f_1(2) - f_2(2) = \frac{-24-104+98-2}{0} = \frac{-32}{0} = \infty$$

*

2. *Să se aducă la forma cea mai simplă, cu numitor rațional expresiunea:*

$$E = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt[4]{3}\,\sqrt[12]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{32x\sqrt[4]{432x^7}}{\sqrt{12x^7}}}$$

O expresiune irațională, în formă de produs, este sub forma cea mai simplă când fiecare factor este un radical ireductibil (indicele radicalului și exponentul cantității de sub radical n'au divizori comuni) din expresiuni diferite, exponentul cantității de sub radical fiind mai mic ca indicele radicalului. In acest scop, prezint toate numerile descompuse în factori primi în ultimul radical, ceilalți fiind sub forma cea mai simplă, scot de sub $\sqrt[4]{\ }$ pe x^4 și de sub $\sqrt[2]{\ }$ dela numitor pe x^6.

$$432 = 2^4 \times 3^3$$

$$\begin{array}{r|l} 432 & 2^3 \\ 54 & 2 \times 3^3 \end{array}$$

$$E=\frac{\sqrt[4]{3}\,\sqrt[12]{x^{11}}}{4\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}\right)}\cdot\sqrt[3]{\frac{2^5\cdot 2x^2\sqrt[4]{3^3x^3}}{2x^3\sqrt{3x}}}=\frac{\sqrt[4]{3}\,\sqrt[12]{x^{11}}}{2^2\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}\right)}\times$$

$$\times\sqrt[3]{\frac{2^5\sqrt[4]{3^3x^3}}{x\sqrt{3x}}}=\frac{\sqrt[4]{3}\,\sqrt[12]{x^{11}}}{2^2\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}\right)}\sqrt[3]{\frac{2^5}{x}\frac{\sqrt[4]{3^3x^3}}{\sqrt{3x}}}$$

Ca să nu am radicali suprapuși împart rădăcina de indice 4 prin rădăcina patrată, aducându-le la același indice:

$$E=\frac{\sqrt[4]{3}\,\sqrt[12]{x^{11}}}{2^2\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}\right)}\sqrt[3]{\frac{2^5}{x}}\sqrt[4]{\frac{3^3x^3}{3^2x^2}}=\frac{\sqrt[4]{3}\,\sqrt[12]{x^{11}\times 2}}{2^2\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}\right)}\times$$

$$\times\sqrt[3]{\frac{2^2}{x}\sqrt[4]{3x}}=\frac{\sqrt[4]{3}\,\sqrt[12]{x^{11}}\sqrt[3]{2^2}\sqrt[12]{3x}}{2\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}\right)}=\frac{\sqrt[4]{3}\,\sqrt[12]{3}\sqrt[3]{2^2}\sqrt[12]{x^{11}}\sqrt[12]{x}}{2\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}\right)}$$

Aduc radicalii care conțin pe x la același indice și acei ce conțin pe 3 la același indice și efectuez înmulțirile și împărțirile:

$$E=\frac{\sqrt[3]{2^2}\sqrt[12]{3^3\times 3}\sqrt[12]{x^{12}}}{2\sqrt[12]{x^4}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}\right)}=\frac{\sqrt[3]{2^2}\sqrt[12]{3^4}\sqrt[12]{x^8}}{2\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2^2}\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{x^2}}{2\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}\right)}$$ aplicând proprietatea că valoarea unui radical nu se schimbă împărțind indicele și exponentul cu același număr.

Ca să fac numitorul rațional, trebue să caut polinomul cu care să înmulțesc expresiunea $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}$ pentru a a-

junge la o expresiune rațională simplă spre exemplu $x+3$ sau $x-3$; acel polinom (expresiune) va fi câtul exact al uneia din aceste binoame prin $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}$; dar, cum împărțirile se fac mai simplu cu expresiuni raționale, voi face întâi o substituție care să prezinte binomul $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}$ sub formă rațională, anume: $\sqrt[3]{x}=y$ $\sqrt[3]{3}=a$ atunci $x+3=y^3+a^3$ $x-3=y^3-a^3$.

Apoi trebue să văd dacă y^3+a^3 este divizibil prin $y+a$; condiția de diviziune este ca valoarea polinomului pentru $y=-a$ să fie nulă, ceiace este adevărat; deci y^3+a^3 este divizibil prin $y+a$

$$y^3+a^3=(y+a)(y^2-ay+a^2).$$

Deci pentru a face numitorul rațional va trebui să amplific fracția prin y^2-ay+a^2 exprimat în funcție de x:

$$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3^2}, \quad \text{deci:}$$

$$E=\frac{\sqrt[3]{2^2}\ \sqrt[3]{3}\ \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{2(x+3)}=$$

$$=\frac{x\sqrt[3]{12x}-x\sqrt[3]{36}+3\sqrt[3]{4x^2}}{2(x+3)}$$

*

3. *Să se rezolve ecuația:*

$$\frac{7-11x}{198}+m^3(x-1)-\frac{5-3x}{72}+5m^2x+\frac{3}{132}=$$

$$=-\frac{1}{88}-m(7x+3)-\frac{x}{18}-3x-2+\frac{x}{24}$$

când m are o valoare oarecare. Să se determine adevărata valoare a rădăcinii pentru $m=-1$.

Elimin numitorii, amplificând ecuația cu *c.m.m.m.c.* al numitorilor,

$$\overset{4}{\frac{7-11x}{198}} + \overset{792}{m^3(x-1)} - \overset{11}{\frac{5-3x}{72}} + \overset{792}{5m^2x} + \overset{6}{\frac{3}{132}} =$$

$$= -\overset{9}{\frac{1}{88}} - \overset{792}{m(7x+3)} - \overset{44}{\frac{x}{18}} - \overset{792}{3x} - 2 + \overset{33}{\frac{x}{24}}$$

$198 = 2 \times 3^2 \times 11$
$72 = 2^3 \times 3^2$
$132 = 2^2 \times 3 \times 11$
$88 = 2^3 \times 11$
$18 = 2 \times 3^2$
$24 = 2^3 \times 3$

198	2
99	3^2
11	11
1	

132	2^2
33	3
11	11
1	

C. m. m. m. c. $= 2^3 \times 3^2 \times 11 = 72 \times 11 = 792.$

$$28 - 44x - 55 + 33x + 18 + 9 + 44x - 33x + \\ + 792\left[m^3(x-1) + 5m^2x + m(7x+3) + 3x - 2\right] = 0$$

$$792\left[m^3(x-1) + 5m^2x + 7mx + 3m + 3x + 2\right] = 0$$

Ecuația se simplifică prin 792. Separ termenii:

$$m^3x + 5m^2x + 7mx + 3x = m^3 - 3m - 2$$

Reduc termenii în x din membrul I, dând pe x în factor deoarece coeficienții sunt literali:

$$(m^3 + 5m^2 + 7m + 3)\,x = m^3 - 3m - 2$$

$$x = \frac{m^3 - 3m - 2}{m^3 + 5m^2 + 7m + 3}$$

$$(x)_{m=-1} = \frac{-1 + 3 - 2}{-1 + 5 - 7 + 3} = \frac{0}{0} \text{ nedeterminat.}$$

Atât numărătorul cât și numitorul sunt divizibili prin

$m+1$, factor prin care voi simplifica fracția. Fac împărțirile exacte:

$$m^3-3m-2=(m+1)(m^2-m-2)$$
$$m^3+5m^2+7m+3=(m+1)(m^2+4m+3)$$
$$x=\frac{m^2-m-2}{m^2+4m+3}$$

$(x)_{m=-1}=\frac{1+1-2}{1-4+3}=\frac{0}{0}$ încă nedeterminare din același motiv.

$$m^2-m-2=(m+1)(m-2)$$
$$m^2+4m+3=(m+1)(m+3)$$
$$x=\frac{m-2}{m+3} \qquad (x)_{m=-1}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$$

4. In ecuația:

$$Ax+\frac{1}{36}+\frac{\sqrt{2x-3}}{18}=\frac{\sqrt{x-5}}{12}\text{, } A \text{ are forma:}$$

$$A=\frac{m^3-5m^2+7m-3}{m-1}$$

1°. Să se determine adevărata valoare a lui A pentru $m=1$; 2° să se rezolve ecuația în acest caz.

1° $(A)_{m=1}=\frac{1-5+7-3}{0}=\frac{0}{0}$ nedeterminat, din cauză că atât numătărorul cât și numitorul au divizorul comun $m-1$, prin care trebue simplificată fracția.

$$m^3-5m^2+7m-3=(m-1)(m^2-4m+3)$$
$$A=m^2-4m+3 \qquad (A)_{m=1}=1-4+3=0$$

$$2^0\ \frac{1}{36}+\frac{\overbrace{\sqrt{2x-3}}^{2}}{18}=\frac{\overbrace{\sqrt{x-5}}^{3}}{12}$$

Elimin numitorii :

$$36 = 2^2 \times 3^2 \qquad 18 = 2 \times 3^2 \qquad 12 = 2^2 \times 3$$

$$C.m.m.m.c = 2^2 \times 3^2 = 36$$

$$1 + 2\sqrt{2x-3} = 3\sqrt{x-5}$$

Fiind o ecuație cu radicali, trebue să găsesc o ecuație rațională echivalentă cu ea.

Elimin radicalii, *izolându-i* câte unul într'un membru și apoi ridicând ambii membri la patrat. Cu această operație se pot introduce rădăcini noi, deci rădăcinile găsite, vor trebui verificate.

Radicalul din membrul al II-lea, fiind singurul termen în acel membru, va dispare prin ridicare la patrat.

$$(1 + 2\sqrt{2x-3})^2 = 9(x-5)$$

$$1 + 4\sqrt{2x-3} + 4(2x-3) = 9x - 45$$

Izolez radicalul și reduc termenii asemenia din membrul al II-lea.

$$4\sqrt{2x-3} = x - 34$$

$$16(2x-3) = x^2 - 68x + 1156$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array}$$

Grupez toți termenii într'un membru, ecuația fiind de gr. II.

$$x^2 - 100x + 1204 = 0$$

Aplic formula cea mai simplă, coeficientul lui x fiind pereche, coeficientul lui x^2 fiind egal cu 1.

$$x = -b' \pm \sqrt{b'^2 - c}$$

$$x = 50 \pm \sqrt{2500-1204} = 50 \pm \sqrt{1296} = 50 \pm 36$$

$$x' = 86$$

$$x'' = 14$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{12.96} & 36 \\ \hline 39.6 & 66 \\ 0 & 6 \\ \hline & 396 \end{array}$$

Se cercetează dacă $x=86$ este rădăcină, dacă verifică ecuația:

$$1+2\sqrt{2x-3}=3\sqrt{x-5}$$

$$(1+2\sqrt{2x-3})_{x=86}=1+2\sqrt{172-3}=$$

$$1+2\sqrt{169}=1+2\times 13=27$$

$$(3\sqrt{x-5})_{x=86}=3\sqrt{86-5}=3\sqrt{81}=27$$

$\sqrt{169}$	13
69	23 ×
0	3
	69

Cei doi membri obținând valori identice pentru $x=86$, această valoare este rădăcină.

Se verifică $x=14$.

$$(1+2\sqrt{2x-3})_{x=14}=1+2\sqrt{28-3}=1+10=11$$

$$(3\sqrt{x-5})_{x=14}=3\sqrt{14-5}=3\sqrt{9}=9$$

Cei doi membri luând valori diferite pentru $x=14$, această valoare nu e rădăcină.

5. *Să se rezolve neegalitatea*:

$$\frac{x^2-6x+9}{-2x^2+x-7}\left[-3+\frac{37x+22}{5x^2-11x+2}+\frac{1}{x-2}-\frac{5}{5x-1}\right]\geq 0$$

Neegalitățile se rezolvă studiind semnul expresiunilor pentru toate valorile lui x și alegând intervalele de variație ale necunoscutei x pentru care neegalitatea este satisfăcută. Pentru aceasta trebue adusă expresiunea din membrul I la forma cea mai simplă, după ce s'au grupat toți termenii în membrul I, astfel ca membrul al II-lea să fie zero. Expresiile raționale cele mai simple sunt polinoamele și fracțiile, acestea fiind câturi de polinoame. Prin urmare problema se reduce la aflarea semnului unui polinom, semn ce depinde de rădăcinile polinomului.

In acest exemplu, trebue mai întâi efectuată suma algebrică a fracțiilor din paranteză, pentru care scop, trebuesc aduse fracțiile la același numitor, cel mai simplu comun multiplu al numitorilor.

$x-2$ și $5x-1$ sunt factori simpli, fiind de gr. I și cei doi termeni neavând factori comuni; Pentru descompunerea trinomului $5x^2-11x+2$ în factori ne servim de teorema: dacă un trinom de gr. II are rădăcini reale se descompune în 3 factori: Coeficientul necunoscutei de gr. II și diferențele dintre x și fiecare rădăcină:

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$$

Pentru aflarea rădăcinilor, se rezolvă ecuația

$$5x^2-11x+2=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{11\pm\sqrt{121-40}}{10}=\frac{11\pm 9}{10}\qquad x'=2\qquad x''=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$5x^2-11x+2=5\left(x-\frac{1}{5}\right)(x-2)=(5x-1)(x-2)$$

Deci: $C.m.s.m.c.=(5x-1)(x-2)$.

$$\frac{x^2-6x+9}{-2x^2+x-7}\left[\underbrace{\frac{(x-2)(5x-1)}{-3+\frac{37x+22}{(x-2)(5x-1)}}}+\frac{\overbrace{1}^{5x-1}}{x-2}-\frac{\overbrace{5}^{x-2}}{5x-1}\right]>0$$

$$\frac{x^2-6x+9}{-2x^2+x-7}\times$$

$$\times\frac{-15x^2+33x-6+37x+22+5x-1-5x+10}{(x-2)(5x-1)}>0 \text{ sau:}$$

$$\frac{(x^2-6x+9)(-15x^2+70x+25)}{(-2x^2+x-7)(x-2)(5x-1)}>0 \text{ sau scoțând fac-}$$

torul comun 5

$$\frac{5(x^2-6x+9)(-3x^2+14x+5)}{(-2x^2+x-7)(x-2)(5x-1)}>0.$$

Trebue studiat semnul polinoamelor dela ambii termeni. Se întrebuinţează teoremele: un binom de gradul I are acelaş semn ca şi coeficientul primului său termen (termenul în x) pentru valorile lui x mai mari ca rădăcina, semn contrar pentru valorile lui x mai mici ca rădăcina.

Un trinom de gradul al II-lea, dacă are rădăcini reale, are acelaş semn ca coeficientul lui x^2, a, pentru valorile lui x mai mici ca cea mai mică rădăcină şi mai mari ca cea mai mare rădăcină, semn contrar pentru valorile lui x cuprinse între rădăcini (mai mari ca cea mai mică rădăcină şi mai mici ca cea mai mare rădăcină); dacă are rădăcini egale sau imaginare, are, pentru toate valorile lui x, semnul primului său termen.

$x-2=0$ dă $x=2$; $5x-1=0$, $x=\frac{1}{5}$

1^0 $x^2-6x+9=0$

$x=-b'\pm\sqrt{b'^2-c}=3\pm\sqrt{9-9}=3$ rădăcini egale,

deci $x^2-6x+9=(x-3)^2$

2^0 $-3x^2+14x+5=0$ sau $3x^2-14x-5=0$

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}=\frac{7\pm\sqrt{49+15}}{3}=\frac{7\pm\sqrt{64}}{3}=\frac{7\pm 8}{3}$$

rădăcini reale neegale:

$x'=5$ $x''=-\frac{1}{3}$ deci

$$-3x^2+14x+5=-3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-5)$$

3. $-2x^2+x-7=0$ sau $2x^2-x+7=0$.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1-56}}{4}$$ rădăcini imaginare.

Pentru a decide semnul fracției, pentru orice valori ale lui x, însemn pe scurt numărătorul cu $N(x)$, numitorul cu $n(x)$, fracția $F(x)$ și aşez valorile importante găsite pentru x, pentru care vreunul din factori își schimbă semnul, într'un tablou, în care fixez semnul fiecărui factor în toate intervalele.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	2	3	5	$+\infty$
x^2-6x+9	+	+	+	+	0 +		+
$-3x^2+14x+5$	−	0 +	+	+	+	0 −	
$N(x)$	−	0 +	+	+	0 +	0 −	
$-2x^2+x-7$	−	−	−	−	−	−	
$x-2$	−	−	−	0 +	+	+	
$5x-1$	−	−	0 +	+	+	+	
$(x)u$	−	−	0 +	0 −	−	−	
$F(x)$	+	0 −	∞	+ ∞	−	0 −	0 +

De unde urmează că fracția este mai mare ca zero (că neegalitatea este satisfăcută) pentru valorile lui x care satisfac la una din condițiile:

$1^0 \quad x < -\frac{1}{3}$

$2^0 \quad \frac{1}{5} < x < 2$

$3^0 \quad 5 < x$

6. *Să se rezolve ecuația :*

$$12 + \sqrt{-215x^2 + 504x + 108} = 6x^2 - 14x$$

Izolez radicalul și ridic la patrat trinomul din membrul al doilea după formula $(a+b+c)^2 = \sum a^2 + 2\sum ab$.

$$-215x^2 + 504x + 108 = (6x^2 - 14x - 12)^2$$

$$-215x^2 + 504x + 108 = 36x^4 + 196x^2 + 144 - 168x^2 - 144x^2 + 336x$$

14	14
14	12
56	28
14	14
196	168

Trec toți termenii în membrul al II-lea (x^4 fiind pozitiv în acel membru) reduc și ordonez termenii și schimb membrii între ei.

$$36x^4 - 168x^2 + 267x^2 - 168x + 36 = 0$$

Am dat peste o ecuație reciprocă, termenii extremi și cei egal depărtați de extremi având coeficienți egali. Rădăcinile ecuațiilor reciproce sunt grupate câte două, în fiecare grupă întrând o valoare și inversa ei, afară de $+1$ și -1 care pot fi singure.

In rezolvirea ecuațiilor reciproce, încerc întâi dacă nu admit aceste rădăcini speciale ± 1.

Valoarea polinomului din membrul I pentru $x = +1$ este :

$36 - 168 + 227 - 168 + 36 \neq 0$ deci $+1$ nu e rădăcină pentru $x = -1$.

$36 + 168 + 227 + 168 + 36 \neq 0$ deci -1 nu e rădăcină.

Grupez termenii cu coeficienți egali, împart prin x la o putere egală cu jumătatea exponentului maxim și pentru reducerea gradului ecuației la jumătate întrebuințez substituția :

$$x + \frac{1}{x} = y \quad \text{din care rezultă} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$36\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-168\left(x+\frac{1}{x}\right)+267=0$$

$$36(y^2-2)-168y+267=0$$

$$36y^2-168y+195=0 \quad \text{simplific prin 3:}$$

$$12y^2-56y+65=0$$

$$y=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

$$y=\frac{28\pm\sqrt{784-780}}{12}=\frac{28\pm 2}{12}$$

$$y'=\overset{6}{\frac{30}{12}}=\frac{5}{2} \qquad y''=\overset{2}{\frac{26}{12}}=\frac{13}{6}$$

Deci:

$$1^0\ x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \quad \text{și} \quad 2^0\ x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6}$$

Rezolv prima ecuație:

$$2x^2-5x+2=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}$$

$$x'=2$$

$$x''=\frac{1}{2}$$

Rezolv ecuația a II-a

$$6x^2-13x+6=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{12}=\frac{13\pm 5}{12}$$

$$x'''=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$$

$$x''''=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

28	65
28	12
224	130
56	65
784	780

BCU IAȘI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

Rădăcinile trebuesc verificate, fiindcă în decursul operațiilor am întrebuințat o operație care putea introduce rădăcini noi, anume : ridicarea la patrat a ambilor membri.

$$\left(12+\sqrt{-215x^2+504x+108}\ -6x^2+14x\right)_{x=2}=12+$$

$$+\sqrt{-860+1008+108}-24+28=16+\sqrt{-860+1116}=$$

$$=16+\sqrt{256}\neq 0 \quad \text{deci } x=2 \text{ } \textit{nu e rădăcină.}$$

$$\left(12+\sqrt{215x^2+504x+108}-6x^2+14x\right)_{x=\frac{3}{2}}=12+$$

$$+\sqrt{-\frac{1935}{4}+\frac{1512}{2}+108}-\frac{54}{2}+\frac{42}{2}\neq 0$$

$x=\frac{3}{2}$ nu e rădăcină.

$$\left(12+\sqrt{-215x^2+504x+108}-6x^2+14x\right)_{x=\frac{1}{2}}=12+$$

$$+\sqrt{-\frac{215}{4}+252+108}-\frac{3}{2}+7\neq 0$$

$x=\frac{1}{2}$ nu e rădăcină.

$$\left(12+\sqrt{-215x^2+504x+108}-6x^2+14x\right)_{x=\frac{2}{3}}=12+$$

$$+\sqrt{-\frac{860}{9}+\frac{1008}{3}+108}-\frac{24}{9}+\frac{28}{3}\neq 0$$

$x=\frac{2}{3}$ nu e rădăcină.

Se vede că ecuația irațională dată nu admite nici o rădăcină, toate rădăcinile aflate satisfăcând ecuației : $\sqrt{-215x^2+504x+108}=-6x^2+14x+12$

După ce s'a izolat radicalul, membrul al II-lea fiind egal și de semn contrar ca în ecuația dată ; această

ecuaţie prin ridicare la patrat conduce la aceiaş ecuaţie reciprocă. In adevăr:

$$\left(-12+\sqrt{215x^2+504x+108}+6x^2-14x\right)_{x=2}=$$
$$=16-16=0$$

$$\begin{array}{r|r} \sqrt{2.56} & 16 \\ \hline 15.6 & 26 \\ \hline 0 & 6 \\ \hline & 156 \end{array}$$

$$\left(-12+\sqrt{-215x^2+504x+108}+6x^2-14x\right)_{x=\frac{1}{2}}=$$

$$-\frac{35}{2}+\sqrt{\frac{-215+360\times 4}{4}}=-\frac{35}{2}+$$
$$+\frac{\sqrt{-215+1140}}{2}=$$
$$=-\frac{35}{2}+\sqrt{\frac{1225}{2}}=-\frac{35}{2}+\frac{35}{2}=0$$

$$\begin{array}{r|r} \sqrt{12.25} & 35 \\ \hline 32.5 & 65 \\ \hline 0 & 5 \\ \hline & 325 \end{array}$$

$$\left(-12+\sqrt{-215x^2+504x+108}+6x^2-14x\right)_{x=\frac{3}{2}}=$$

$$=-\frac{39}{2}+\sqrt{\frac{-1935+3024+432}{4}}=$$
$$=-\frac{39}{2}+\frac{\sqrt{-1935+3456}}{2}=-\frac{39}{2}+$$
$$+\frac{\sqrt{1521}}{2}=-\frac{39}{2}+\frac{39}{2}=0$$

$$\begin{array}{r|r} \sqrt{15.21} & 39 \\ \hline 62.1 & 69 \\ \hline 0 & 9 \\ \hline & 621 \end{array}$$

$$\left(-12+\sqrt{-215x^2+504x+108}+6x^2-14x\right)_{x=\frac{2}{3}}=$$
$$=-\frac{56}{3}+\sqrt{\frac{-860+3024+972}{9}}=$$
$$=-\frac{56}{3}+\sqrt{\frac{3136}{3}}=-\frac{56}{3}+\frac{56}{3}=0$$

$$\begin{array}{r|r} 31.36 & 56 \\ \hline 63.6 & 106 \\ \hline 0 & 6 \\ \hline & 636 \end{array}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

7. *Să se rezolve ecuația:*

$(m^2-7m+12)x^2-(2m^2-14m+25)x+(m^2-7m+12)=0$

în cazul $m=1$; *2° Să se găsească valorile parametrului m pentru care ecuația are rădăcini egale și să se găsiască aceste rădăcini. 3° Să se găsiască valorile lui m pentru care ecuația are rădăcini egale și de semne contrare; 4° Valorile lui m pentru care ecuația are rădăcini inverse una alteia; 5° Să se rezolve ecuația în general; 6° Să se discute semnul rădăcinilor.*

$1^0\ 6x^2-13x+6=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{12}=\frac{13\pm 5}{12}$$

$$x'=\overbrace{\frac{18}{12}}^{6}=\frac{3}{2}\qquad x''=\overbrace{\frac{8}{12}}^{4}=\frac{2}{3}$$

2^0 Ecuația are rădăcini egale când realizantul R, (expresiunea de sub radical din formula rădăcinii) este nul.

$R=b^2-4ac=(2m^2-14m+25)^2-4(m^2-7m+12)^2$

expresiunea fiind o diferență între două patrate se descompune în doi factori: suma rădăcinilor celor două patrate și diferența acelorași rădăcini:

$R=(2m^2-14m+25+2m^2-14m+24)\ (2m^2-$

$-14m+25-2m^2+14m-24)$.

$R=4m^2-28m+49=(2m-7)^2$ conținând două patrate perfecte și dublul produs al rădăcinilor celor 2 patrate, negativ.

$R=0$, $2m-7=0$ Pentru $m=\frac{7}{2}$ ecuația în x are rădăcini egale și anume:

$$\left(\frac{49}{4}-\frac{49}{2}+12\right)x^2-\left(\frac{98}{4}-\frac{98}{2}+25\right)x+$$

$$\left(\frac{49}{4}-\frac{49}{2}+12\right)=0$$

$-x^2-2x-1=0$ sau $x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0 \qquad x=-1.$

3° Dacă $x'=-x'' \qquad x'+x''=0$

Cum între rădăcinile unei ecuații de gr. II și coeficienții există relația: $x'+x''=-\frac{b}{a}$ trebue $\frac{b}{a}=0$.

Pentru ca fracția să anuleze trebue $b=0$ $a\neq 0$.

In ecuația dată:

$$\frac{2m^2-14m+25}{m^2-7m+12}=0,\ 2m^2-14m+25=0 \text{ și } m^2-7m+12\neq 0$$

Trebue de găsit rădăcinile numărătorului și de cercetat valoarea numitorului pentru acele rădăcini.

$2m^2-14m+25=0$

$$m=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

$$m=\frac{7\pm\sqrt{49-50}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{-1}}{2}$$ rădăcini imaginare.

Deci nu există valori reale pentru m, care să facă ca ecuația dată să aibă rădăcini egale și de semne contrare.

4° $x'=\frac{1}{x''}$ adică $x'x''=1$.

Cum între rădăcinile unei ec. de gr. II și coeficienți există relația:

$$x'x''=\frac{c}{a}$$

rezultă: $\frac{c}{a}=1$ sau $c=a$.

In ecuația dată c este identic cu a, deci pentru toate valorile lui m, ecuația are rădăcinile inverse una alteia, ecuația este reciprocă pentru orice valoare dată lui m.

5° $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x = \frac{2m^2-14m+25 \pm \sqrt{(2m-7)^2}}{2(m^2-7m+12)} =$$

$$= \frac{2m^2-14m+25 \pm (2m-7)}{2(m^2-7m+12)}.$$

$$x' = \frac{2m^2-12m+18}{2(m^2-7m+12)} = \frac{m^2-6m+9}{m^2-7m+12}.$$

Pentru simplificare, descompun în factori numărătorul și numitorul: $m^2-6m+9=(m-3)^2$

$$m^2-7m+12=0$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}.$$

$m'=4 \quad m''=3 \quad m^2-7m+12=(m-3)(m-4).$

$$x' = \frac{(m-3)^2}{(m-3)(m-4)} = \frac{m-3}{m-4}.$$

$$x'' = \frac{2m^2-16m+32}{2(m-3)(m-4)} = \frac{m^2-8m+16}{(m-3)(m-4)} =$$

$$= \frac{(m-4)^2}{(m-3)(m-4)} = \frac{m-4}{m-3}.$$

Pentru a afla semnul rădăcinilor, se aranjează, într'un tablou, toate valorile lui m importante, acele cari schimbă semnul rădăcinilor: $m=3$, $m=4$ și se cercetează semnul în fiecare interval:

m	$-\infty$		$+3$		$+4$		$+\infty$
$m-3$		$-$	0	$+$	1	$+$	
$m-4$		$-$	-1	$-$	0	$+$	
x'		$+$	0	$-$	∞	$+$	
x''		$+$	∞	$-$	0	$+$	

Se vede din tablou că cele două rădăcini au același semn pentru orice valoare a lui m, fiind negative numai pentru valorile lui m ce satisfac neegalităților:

$$3 < m < 4.$$

Semnul rădăcinilor se putea discuta și fără a avea valoarea explicită a lor în funcție de m, ci bazându-ne pe faptul că din ecuație se cunoaște suma și produsul rădăcinilor:

$$s = -\frac{b}{a} \qquad P = \frac{c}{a}$$

In cazul ecuației date:

$$S = \frac{2m^2 - 14m + 25}{m^2 - 7m + 12} \qquad P = 1 \qquad \text{sau}$$

$S = \dfrac{2m^2 - 14m + 25}{(m-3)(m-4)}$ numărătorul având rădăcini imaginare.

m	$-\infty$	$+3$	$+4$	$+\infty$
P	$+$	$+$	$+$	
	Rădăcini de același semn			
$2m^2 - 14m + 25$	$+$	$+$	$+$	
$(m-3)(m-4)$	$+$	$-$	$+$	
S	$+$	$-$	$+$	
	Rădăcini pozitive	Rădăcini negative	Rădăcini pozitive	

8. *Să se discute natura rădăcinilor ecuației:*

$$(3m + 109)x^2 + 24(m + 2)x + 12(m - 3) = 0.$$

când m variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

Trebue să se cerceteze mai întâiu semnul realizantului, care determină intervalul de variație a parametrului m pentru care ecuația are rădăcini reale; apoi semnul produsului rădăcinilor $\frac{c}{a}$, care hotărăște dacă rădăcinile sunt de acelaș semn sau de semne contrare; și în fine, semnul sumei, care precizează semnul fiecărei rădăcini și conclude care din rădăcini e mai mare în valoare absolută, atunci când sunt de semne contrare.

$$R = b'^2 - ac = 12^2(m+2)^2 - 12(m-3)(37m+109) =$$
$$= 12[12(m^2+4m+4) - 37m^2 + 111m - 109m + 327]$$

$$R = 12(-25m^2+50m+375) = -12\times 25(m^2-2m-15)$$

pe care îl descompun în factori după teorema : un trinom de gradul al doilea în x se poate pune sub forma : $a(x-x')(x-x'')$ x', x'' fiind rădăcinile trinomului :

$$m^2 - 2m - 15 = 0$$

$$m = -b' \pm \sqrt{b'^2 - c} = 1 \pm \sqrt{1+15} = 1 \pm 4$$

$$m' = -3 \quad m'' = 5$$

$$R = -12 \times 25(m+3)(m-5).$$

$$P = \frac{12(m-3)}{37m+109}$$ Rădăcinile fiind $m = 3$; $m = -\frac{109}{37}$

$$S = -\frac{24(m+2)}{37m+109}$$ Rădăcinile termenilor fiind $m = -2$

$$m = -\frac{109}{37}.$$

Semnul fiecărei expresiuni depinde de rădăcinile polinomului, dacă expresiunea e întreagă,— de rădăcinile numărătorului și a numitorului, dacă expresiunea este fracționară; de multe ori în acest din urmă caz se amplifică fracția cu numitorul, pentru ca, acesta devenind patrat perfect, semnul să depindă numai de numărător.

Aranjez valorile lui m pentru care se schimbă semnul vreuneia din expresiuni (rădăcinile simple sau de un grad impar de multiplicitate ale polinoamelor) într'un tablou în ordine crescătoare, în care precizez în diferitele intervale determinate semnul fiecărei expresiuni şi deci natura rădăcinilor.

m	$-\infty$	-3	$-\frac{109}{37}$	-2	$+3$	$+5$	$+\infty$
$R=-12.25\times(m+3)(m-5)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
	Rădăcini imaginare	Reale	Reale	Reale	Reale		Imaginare
$P=\frac{12(m-3)}{36m+109}$		$+$	∞ $-$	$-$	0	$+$	
		Rădăcini de acelaş semn	Rădăcini de semne contrare	Rădăcini de semne contrare	Rădăcini de acelaş semn		
$S=\frac{-24(m+2)}{37m+109}$		$-$	∞ $+$	0 $-$	$-$		
		Rădăcini negative	Rădăcina pozitivă mai mare ca Rădăcina negativă	Rădăcina negativă mai mare ca Rădăcina pozitivă	Rădăcini negative		

9°. *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^2-(m^2-3m+3)x+(m^2-3m+2)=0$$

Se va găsi o rădăcină independentă de m şi alta funcţie de m; să se discute semnul celei de a doua, când m variază dela $-\infty$ *la* $+\infty$.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$b^2-4ac=(m^2-3m+3)^2-4(m^2-3m+2)=m^4+9m^2+$$
$$+9-6m^3+6m^2-18m-4m^2+12m-8=$$
$$=m^4-6m^3+11m^2-6m+1.$$

Ar trebui de văzut dacă rădăcina patrată a acestui polinom se extrage exact, lucru ce se poate decide dacă se descompune polinomul în factori simpli. Dacă s'ar cunoaşte rădăcinile polinomului m_1, m_2, m_3, m_4, atunci din faptul că polinomul se anulează pentru una din ele, exemplu m_1 se deduce că e divizibil prin $m-m_1$; analog pentru toate diferenţele dintre m şi una din rădăcini. Alţi factori nu mai poate avea, dat fiind gradul, decât un factor constant, care se determină identificând coeficienţii puterilor celor mai înalte, ca fiind coeficientul lui m^4.

Trebue de găsit rădăcinile ecuaţiei reciproce:

$$m^4-6m^3+11m^2-6m+1=0$$

$$m^2+\frac{1}{m^2}-6\left(m+\frac{1}{m}\right)+11=0$$

Se face substituţia $m+\frac{1}{m}=y$ de unde $m^2+\frac{1}{m^2}=y^2-2$

$$y^2-6y+9=0 \quad \text{sau} \quad (y-3)^2=0$$

de unde se vede că membrul I al ecuaţiei în m este un patrat perfect, aşa că nu mai e necesar să se rezolve complect ecuaţia în m

$$m^4-6m^3+11m^2-6m+1=m^2\left[m^2+\frac{1}{m^2}-\right.$$

$$\left.-6\left(m+\frac{1}{m}\right)+11\right]=m^2(y-3)^2=m^2\left(m+\frac{1}{m}-3\right)^2$$

$$R=m^2\times\frac{(m^2-3m+1)^2}{m^2}=(m^2-3m+1)^2$$

$$x=\frac{m^2-3m+3\pm(m^2-3m+1)}{2}$$

$$x'=\frac{2m^2-6m+4}{2}=m^2-3m+2$$

$$x''=\frac{2}{2}=1$$

Pentru semnul rădăcinii x', observ că x', în funcție de m este un trinom de gradul al doilea și deci semnul depinde de rădăcinile trinomului, adică rădăcinile ecuației obținute egalând trinomul cu zero.

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$m' = 1 \quad m'' = 2$$

$$x' = (m-1)(m-2)$$

m	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Verificare. Pentru $m = 0$, $x' > 0$. In adevăr:

$$x' = = \left(m^2 - 3m + 2\right)_{m=0} = 2$$

Pentru $m = \frac{3}{2}$ $x' < 0$; în adevăr

$$\left(x'\right)_{m=\frac{3}{2}} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = -\frac{1}{4}$$

Observare. Mai general, se putea extrage rădăcina patrată dintr'un polinom prin metoda coeficienților nedeterminați:

$$m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m + 1 = (am^2 + bm + c)^2 + dm + f$$

unde coeficienții a, b, c, d, f se determină aplicând teorema: Condiția ca două polinoame să fie identice, este ca coeficienții acelorași puteri să fie egali. Ridic la patrat după formula $(a + b + c)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab$ și ordonez

$$m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m + 1 \equiv a^2m^4 + 2abm^3 + (b^2 + 2ac)m^2 + (2bc + d)m + c^2 + f$$

De unde rezultă :

$a^2 = 1 \quad 2ab = -6 \quad b^2 + 2ac = 11 \quad 2bc + d = -6 \quad c^2 + f = 1$

adică

$$a = \pm 1 \quad b = -\frac{6}{2a} = \mp 3 \quad c = \frac{11 - b^2}{2a} = \frac{2}{\pm 2} = \pm 1$$

$$d = -6 - 2bc = 0 \quad f = 1 - c^2 = 0.$$

Se obține pentru $\sqrt{b^2 - 4ac}$ aceleași două valori : $m^2 - 3m + 1$ și $-(m^2 - 3m + 1)$

10. *Să se rezolve sistemul* :

$$\begin{cases} x + y = 2m^2 - 9m + 1 \\ xy = m^4 - 9m^3 + 21m^2 + m - 30. \end{cases}$$

2°. Să se discute semnul rădăcinilor când m variază dela $-\infty$ *la* $+\infty$.

Sistemul este de forma simplă.

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b. \end{cases}$$

1° Se poate rezolva prin 3 metode : I) *metoda substituției*, fiindcă o ecuație e de gr. I, sau fiindcă ambele ecuații sunt de gr. I în privința uneia din necunoscute.

II) *Un artificiu* : Se caută să se transforme sistemul de gr. II într'un sistem de gr. I echivalent și anume, cunoscându-se suma necunoscutelor, se urmărește să se găsească și diferența lor, lucru ce se obține simplu ridicând prima ecuație la patrat, scăzând ecuația a II-a, amplificată cu 4 și extrăgând rădăcina patrată din rezultat.

III) Cel mai des întrebuințat dintre artificii : se identifică necunoscutele cu rădăcinile unei ecuații de gradul al II-lea ; se obține ecuația de gr. II bazându-se pe relațiile dintre coeficienți și rădăcini : 1. Suma rădăcinilor este egală cu coeficientul lui x de semn schimbat,

în cazul când coeficientul lui x^2 este 1, ceea ce se poate realiza întotdeauna; 2. In acelaş caz, produsul rădăcinilor este termenul liber de necunoscută. Deci, reciproc, în cazul nostru se ajunge la ecuaţia:

$$z^2-(2m^2-9m+1)z+(m^4-9m^3+21m^2+m-30)=0$$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$$

$$\frac{2m^2-9m+1\pm\sqrt{(2m^2-9m+1)^2-4(m^4-9m^3+21m^2+m-30)}}{2}$$

$$z=\frac{2m^2-9m+1\pm\sqrt{4m^4-36m^3+85m^2-18m+1-4m^4+36m^3-84m^2-4m+120}}{2}$$

$$z=\frac{2m^2-9m+1\pm\sqrt{m^2-22m+121}}{2}=$$

$$\frac{2m^2-9m+1\pm\sqrt{(m-11)^2}}{2}=\frac{2m^2-9m+1\pm(m-11)}{2}$$

$$z'=x=\frac{2m^2-8m-10}{2}=m^2-4m-5 \quad \text{şi}$$

$$z''=y=\frac{2m^2-10m+12}{2}=m^2-5m+6$$

sau $z'=y=m^2-4m-5$ şi $z''=x=m^2-5m+6$

2° Pentru semn, descompun trinoamele în factori.

$$m^2-4m-5=0$$

$$m=-b'\pm\sqrt{b'^2-c}=2\pm\sqrt{4+5}=2\pm3 \text{ decim } m'=5;\ m''=-1$$

$$x=(m+1)(m-5)$$

$$m^2-5m+6=0$$

$$m=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2} \quad m'=3;\ m''=2$$

$$y=(m-2)(m-3).$$

m	$-\infty$	-1	$+2$	$+3$	$+5$	$+\infty$
$x=(m+1)(m-5)$	$+$	0 $-$	$-$	$-$	0	$+$
$y=(m-2)(m-3)$	$+$	$+$	0 $-$	0 $+$	$+$	

11. *Să se rezolve ecuația:*

$$y^2-(x^2+x-8)y+x^2-4x^2-4x^2-4x+16=0$$

în privința lui y; 2° Să se interpreteze geometric valorile lui x care conduc la rădăcini egale; 3° Să se construiască curbele care reprezintă variația celor două rădăcini.

$$1^0\ y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(x^2+x-8)}{2}\pm$$

$$\pm\frac{\sqrt{(x^2+x-8)^2-4(x^3-4x^2-4x+16)}}{2}=\frac{x^2+x-8}{2}\pm$$

$$\pm\frac{\sqrt{x^4+2x^3-15x^2-16x+64-4x^3+16x^2+16x-64}}{2}=$$

$$=\frac{x^2+x-8\pm\sqrt{x^4-2x^3+x^2}}{2}=$$

$$=\frac{x^2+x-8\pm\sqrt{x^2(x-1)^2}}{2}=\frac{(x^2+x-8)\pm(x^2-x)}{2}$$

$$y'=\frac{2x^2-8}{2}=x^2-4$$

$$y''=\frac{2x-8}{2}=x-4$$

2° Valorile lui x care conduc la rădăcini egale pentru y sunt acelea care anulează realizantul, anume:

$$x=0\quad\text{și}\quad x=1$$

Pentru aceste valori, valorile corespunzătoare pentru y sunt:

$$B \begin{cases} x=0 \\ y'=y''=-4 \end{cases} \quad \text{și} \quad E \begin{cases} x=1 \\ y'=y''=-3 \end{cases}$$

Cum fiecare din ecuațiile $y=x-4$ și $y=x^2-4$ reprezintă câte o curbă, prima o dreaptă, a doua o parabolă, se vede că punctele cu coordonatele $(0,-4)$ și $(1,-3)$ sunt puncte comune la cele două curbe, satisfăcând ambele ecuații, sunt deci puncte de intersecție ale dreptei cu parabola.

3^0 Pentru construcția dreptei $y=x-4$ este suficient să se cunoască două puncte de pe ea, în special, punctele de intersecție a dreptei cu axele de coordonate.

Punctul de intersecția al unei drepte cu axa absciselor, $0x$, se obține, făcând în ecuația dreptei $y=0$, ecuație ce definește axa $0x$:

$$x=4 \quad y=0 \quad , \quad \text{punctul } A$$

Punctul de intersecție cu axa ordonatelor, $0y$, se obține făcând în ecuația dreptei, $x=0$, adică rezolvind sistemul:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=x-4 \end{cases}$$

ceiace dă $x=0$ $y=-4$ coordonatele punctului B.

Pentru construcția parabolei se caută:

1) Valorile lui x care face pe y *infinit.*

2) Valorile lui x, care *anulează* pe y.

3) Valorile lui x, care fac pe y *maximum* sau *minimum.*

4. Punctele de intersecție cu axa y ^cilor^.

1) Valorile lui x care fac pe y infinit sunt $\pm\infty$ anume:

$$\begin{cases} x=-\infty \\ y=+\infty \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x=+\infty \\ y=+\infty \end{cases}$$

2) Valorile lui x care anulează pe y sunt date de sistemul:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$ sau substituind:

$x^2 - 4 = 0$ adică $x = \pm 2$

Deci există două puncte de intersecție a curbei cu axa x^{ilor}:

$$C \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ și } D \begin{cases} x = +2 \\ y = 0 \end{cases}$$

3) Valorile care fac pe y *maximum* sau *minimum* se obțin observând că y este o diferență între două patrate (dacă n'ar fi, s'ar căuta să se puie sub forma unei sume sau a unei diferențe de două patrate, unul variabil, altul constant), patratul variabil fiind aci descăzutul; deci y nu poate avea un maximum, căci poate crește până la înfinit; are un minimum pentru valorile lui x, care dau descăzutului cea mai mică valoare posibilă; descăzutul fiind un patrat, cea mai mică valoare ce o poate avea este zero, dată de $x = 0$.

Deci punctul cel mai de jos al curbei are coordonatele:

$x = 0$ $y = -4$, punctul B deja găsit, care e și punctul de intersecție cu $0y$.

După ce am găsit aceste valori importante, caut semnul lui y în fiecare interval: y fiind un trinom de gr. II cu rădăcinile -2 și $+2$ și cu primul termen pozitiv, este pozitiv pentru toate valorile lui x afară de acelea cuprinse între -2 și $+2$

x	$-\infty$	-2	0	$+1$	$+2$	$+\infty$
$y = x^2 - 4$	$+\infty$ +	0	-4 —	-3 —	0	+ $+\infty$
	descreşte	minim	creşte			

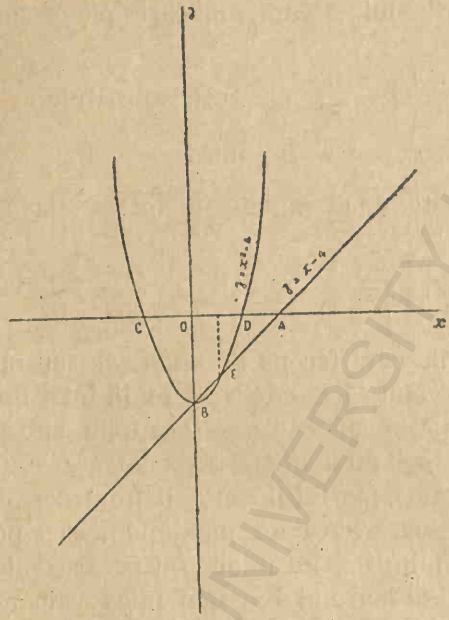

Fig. 15.

*

Probleme de rezolvat.

1. Să se efectueze împărțirile :

a) $x^4 - 11x^3 + 45x^2 - 81x + 54 : x - 2$

(*Răspuns* : $C = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$)

b) $x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 20x + 8 : x + 1$

($C = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$)

c) $42x^4 + 17x^3 - 59x^2 - 19x + 10 : 7x^2 - 3x - 5$

($C = 6x^2 + 5x - 2$)

d) $6x^4 - 22x^3 + 19x^2 - 3x - 35 : 3x^2 - 5x + 7$

($C = 2x^2 - 4x - 5$)

e) $6x^5 - 5x^4 - 37x^3 + 23x^2 + 46x - 24 : 3x^2 + 2x - 8$

($C = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 3$).

f) $15x^5 - 29x^4 + 8x^3 + 34x^2 - 10x + 4 : 3x^3 - 4x^2 - 2x + 7$

($C = 5x^2 - 3x + 2 \quad R = x^2 + 10x - 10$)

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2. Să se afle adevărata valoare a fracțiilor:

a) $\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+8x+15}$

pentru $x=-5$ $\left(R:\dfrac{7}{2}\right)$

b) $\dfrac{x^3-8x^2+21x-18}{x^3-7x^2+15x-9}$

pentru $x=3$ $\left(R:\dfrac{1}{2}\right)$

c) $\dfrac{x^2+x-6}{x^3-2x^2-4x+8}$

pentru $x=2$ $\left(R:\infty\right)$

d) $\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+8x^2+21x+18}$

pentru $x=-3$ $\left(R:\dfrac{4}{5}\right)$

e) $\dfrac{x^4-2x^3-12x^2+40x-32}{x^4-8x^3+24x^2-32x+16}$

pentru $x=2$ $\left(R:\infty\right)$

f) $\dfrac{x^4-7x^3+9x^2+27x-54}{x^4-12x^3+54x^2-108x+81}$

pentru $x=3$ $\left(R:\infty\right)$

g) $\dfrac{x^3-7x^2+11x-5}{x^3+5x^2-13x+7}$

pentru $x=1$. $\left(R:-\dfrac{1}{2}\right)$

BCU ASSEN PAL UNIVERSITY LIBRARY

3. Să se aducă la forma cea mai simplă cu numitor rațional expresiunea :

$$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt[12]{3}\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{9x\sqrt[4]{486x^7}}{\sqrt{12x^7}}}$$

4. Să se afle adevărata valoare a fracțiilor :

a) $\dfrac{\sqrt[6]{y}-5a\sqrt[15]{y^2}+5a^2\sqrt[10]{y}+2a^3\sqrt[15]{y}-4a^4\sqrt[30]{y}+a^5}{\sqrt[15]{y^2}-7a\sqrt[10]{y}-6a^2\sqrt[15]{y}+5a^3\sqrt[30]{y}-a^4}$ pentru $y=a^{30}$

b) $\dfrac{\sqrt[36]{y^5}-4a\sqrt[9]{y}+6a^2\sqrt[12]{y}-3a^3\sqrt[18]{y}-a^4\sqrt[36]{y}+a^5}{\sqrt[9]{y}-7a\sqrt[12]{y}+14a^2\sqrt[18]{y}-11a^3\sqrt[36]{y}+3a^4}$ pentru $y=a^{36}$

5. Să se rezolve ecuațiile :

a) $\left\{\dfrac{\left[8^{\frac{1}{7}}\cdot(2^5)^{\frac{1}{2}}\right]^{14}}{\left[\sqrt[5]{3}\sqrt[3]{9}\sqrt{81}\right]^{15}}:\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^7\right\}\sqrt{4+x}=\frac{64}{3^6}(4-\sqrt{x})$

b) $\left\{\dfrac{\left[(2^3)^{\frac{1}{2}}\cdot(2^4)^{\frac{1}{5}}\right]^{10}}{\left[\sqrt[4]{3^5}\left(\sqrt[3]{3}\right)^2\right]^{12}}:\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^2\right\}\sqrt{3+x}=\left(\frac{8}{27}\right)^5(2-\sqrt{x})$

$(R: x=\frac{1}{4})$

c) $\sqrt{3+x}=5-\sqrt{x}$

d) $\sqrt[14]{3^3}\sqrt[7]{\frac{x}{3}\sqrt[4]{\frac{x^3}{3^2}}}=1$

6. Să se rezolve ecuația:

$$2\sqrt{5x-2} = A\sqrt{45x-28} - \sqrt{5x-12}$$

în care A este adevărata valoare a fracției:

$$A = \frac{m^4 - 7m^3 + 21m^2 - 32m + 20}{m^3 - 3m^2 + 4} \quad \text{pentru } m = 2$$

$$\left(\textit{Răspuns}: \; A = 1 \;\; x = \frac{2}{5}\right)$$

7. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{4x-3} = A\sqrt{4x-1} - \sqrt{4x-7}$$

în care A este adevărata valoare a fracției:

$$A = \frac{2m^4 - 14m^3 + 26m^2 + 6m - 36}{m^3 - 5m^2 + 3m + 9} \quad \text{pentru } m = 3.$$

$$\left(\textit{Răspuns}: \; A = 2 \quad x = \frac{3}{16}\right).$$

8. Să se rezolve ecuația:

$$a) \frac{2-7x}{525} + m^3(x-1) - \frac{11+9x}{315} + m^2(2x-3) +$$

$$+ \frac{4}{105} = \frac{11}{1575} + 4\,\mathrm{m}x - \frac{x}{75} + 8x - 4 - \frac{x}{35}$$

când m are o valoare cunoscută, oricare.

Să se determine adevărata valoare a rădăcinii pentru $m = -2$.

$$\left(\textit{Răspuns}: \; x = \frac{m^3 + 3m^2 - 4}{m^3 + 2m^2 - 4m - 8}\right).$$

$$b) \frac{11+10x}{504} - \frac{21-65x}{1512} + m^2(m-3)x + \frac{1-2x}{168} -$$

$$- m^3 + 7m^2 = 16m + \frac{x+1}{8} - 4x - 12 - \frac{2x+3}{27}$$

când m are o valoare cunoscută, oricare.

BCU BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

Să se determine adevărata valoare a lui x pentru $m = 2$.

$$\left(\textit{Răspuns}: x = \frac{m^2 - 7m^2 + 16m - 12}{m^3 - 3^2 m + 4};\quad x = -\frac{1}{3}\right)$$

9. Să se rezolve sistemul:

$$a)\begin{cases} \sqrt[6]{2}\,x + \sqrt[4]{2}\,y = \sqrt[12]{\dfrac{16\left(\sqrt[3]{2^2}\right)^7}{\sqrt[9]{64}}} \\ \sqrt[4]{2^3}\,x + \sqrt[3]{2}\,y = \sqrt[6]{2^5} \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} \sqrt[10]{3.}\;x + \sqrt[4]{3^3.}\;y = \sqrt[15]{\dfrac{81\left(\sqrt[4]{3^3}\right)^7}{\sqrt[12]{27}}} \\ \sqrt[4]{3.}\;x + \sqrt[5]{3^2.}\;y = \sqrt[10]{3^9} \end{cases}$$

10. Să se rezolve sistemul:

$$a)\begin{cases} x + y = \dfrac{2a^4 - 6a^3 + 38a^2 - 58a + 24}{(a^2 - 6a + 9)(a^2 - a - 2)} \\ y + z = \dfrac{2a^3 - 4a^2 + 14a - 12}{(a^2 - 6a + 9)(a - 2)} \\ z + x = \dfrac{2a^2 - 4a + 2}{a^2 - a - 2} \end{cases}$$

şi să se afle adevărata valoare a rădăcinilor pentru $a = 3$

$$b)\begin{cases} x + y = \dfrac{2a^4 - 4a^3 + 19a^2 - 23a + 6}{(a^2 - 4a + 4)(a^2 - 2a - 3)} \\ y + z = \dfrac{2a^2 - 3a^2 + 7a - 6}{(a^2 - 4a + 4)(a - 3)} \\ z + x = \dfrac{2a^2 - 3a + 1}{a^2 - 2a - 3} \end{cases}$$

şi să se afle adevărata valoare a rădăcinilor pentru $a = 2$.

11. Intr'un liceu de 7 clase sunt 281 elevi; în clasa a II-a este cu un elev mai mult decât fracțiunea $\frac{11}{12}$ din numărul elevilor din clasa I; în clasa a III-a sunt $\frac{8}{9}$ din numărul elevilor din clasa a II-a; în clasa a V-a sunt $\frac{1}{5}$ din numărul elevilor din clasa a II-a mărit cu $\frac{27}{40}$ din numărul elevilor din clasa a IV-a; în clasa a VI-a și a VII-a sunt același număr de elevi ca în clasa a V-a.

Dacă în fiecare din primele 4 clase, ar fi același număr de elevi ca în clasa I și în fiecare din ultimele 3 clase, același număr de elevi ca în clasa a IV-a, atunci numărul elevilor din primele 4 clase ar întrece numărul elevilor din ultimele 3 clase cu 72 de elevi.

Să se afle: *1°* câți elevi sunt în clasa I; *2°* în clasa a IV-a; *3°* în celelalte clase.

12. Intr'un liceu de 7 clase sunt 294 eleve; în clasa a II-a sunt cu 3 eleve mai puțin decât fracțiunea $\frac{17}{18}$ din numărul elevelor din clasa I; în clasa a III-a sunt $\frac{11}{12}$ din numărul elevelor din clasa a II-a; în clasa a V-a sunt $\frac{1}{4}$ din numărul elevelor din clasa a II-a mărit cu $\frac{5}{8}$ din numărul elevelor din clasa a IV-a; în clasele a VI[a] și a VII[a] sunt același număr de eleve ca în clasa a V-a. Dacă în fiecare clasă ar fi același număr de eleve ca în clasa I, atunci numărul elevelor școlii ar întrece numărul elevelor unei școli de 8 clase, populate fiecare ca clasa a IV-a, cu 58 eleve. Să se afle:

1^0 Câte eleve sunt în clasa I; 2^0 în clasa a IV-a; 3^0 în celelalte clase.

13. Să se găsească valorile lui x pentru care sunt satisfăcute ambele neegalităţi:

$$\frac{x-5}{20}-\frac{2x+3}{12}+\frac{7}{9}>\frac{2}{45}$$

$$\frac{2x+7}{15}-\frac{3x}{10}+\frac{1}{30}>1$$

14. Să se rezolve ecuaţia:

a) $x^2+11x+28=0$ $(R: -4,-7)$

b) $x^2+3x-10=0$ $(R: 2,-5)$

c) $x^2-29x+204=0$ $(R: 17,12)$

d) $x^2-3x-130=0$ $(R: 13,-10)$

e) $x^2-4x-21=0$ $(R: 7,-3)$

f) $9x^2-18x+8=0$ $\left(R: \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

g) $x^2-12x+20=0$ $(R: 10,2)$

h) $x^2+7x-18=0$ $(R: 2,-9)$

i) $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{5x-11}{x-1}$ $\left(R: 5, -\frac{5}{4}\right)$

j) $x^2-nx+mx-mn=0$ $(R: n,-m)$

k) $x^2-5mx-2x+10m=0$ $(R: 5m, 2)$

l) $m^2x^2-2m^3x+m^4-1=0$ $\left(R: \frac{m^2+1}{m}, \frac{m^2-1}{m}\right)$

15. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{2x+3}{2x-5}-\frac{8x^2+16x-4a+20a^2-1}{32x^2-200}-\frac{24x^2-12x-20a^2-4a-121}{32x^2-160x+200}=0$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să se găsească valorile lui a pentru care ecuația are rădăcini egale.

16. In ecuația :

$$Ax + \frac{1}{45} + \frac{\sqrt{3x-2}}{15} = \frac{\sqrt{x+7}}{9}$$

A are forma :

$$A = \frac{m^3 - 5m^2 + 8m - 4}{m-2}$$

Să se afle adevărata valoare a lui A pentru $m = 2$. Să se rezolve ecuația în acest caz.

(*Răspuns* : $A = 0 \quad x = 57$)

17. Să se rezolve ecuația :

$$\sqrt{3x^2 + 4x - 4} = 3x - 2$$

$$\left(\text{*Răspuns* : } x' = 2 \quad x'' = \frac{2}{3}\right)$$

18. Să se rezolve ecuația :

$$A\sqrt{4x+5} = B\sqrt{5x-4} + \frac{1}{6}$$

dacă A, B, reprezintă adevărata valoare a expresiunilor :

$$A = \frac{k^2 - 3k + 2}{2(k^2 - 9k + 8)} \qquad B = \frac{k^2 - 1}{42k - 42}$$

pentru $k = 1$.

$$\left(\text{*Răspuns* : } A = \frac{1}{14}, B = \frac{1}{21}; \quad x' = 1 \quad x'' = \frac{205}{16}\right)$$

19. Să se rezolve ecuația :

$$x^2 - 2(t+1)x + t^2 + 2t - 3 = 0$$

1^0 pentru $t = 7$; 2^0 Să se găsească valorile parametrului t pentru care ecuația are rădăcini egale și să se găsească acele rădăcini; 3^0 Să se găsească valorile lui t

pentru care ecuaţia are rădăcini egale şi de semne contrare şi să se găsească acele rădăcini; 4^0 Să se rezolve ecuaţia în general; 5^0 Să se discute semnul rădăcinilor când t variază de la $-\infty$ la $+\infty$.

(*Răspuns*: 2^0 *nu există*; $3^0\ t=-1$; $4^0\ x'=t+3, x''=t-1$)

20. Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei:

$$(m^2+7m+6)x^2+2(m^2+m-6)x+m^2-5m+4=0$$

când m variază de la $-\infty$ la $+\infty$.

(*Răspuns*: $R=8(7m^2-5m+6)$ *mereu pozitiv*;

$$S=\frac{2(m+3)(m-1)}{(m+1)(m+6)};\quad P=\frac{(m-1)(m-4)}{(m+1)(m+6)}\Big]$$

21. In ecuaţia:

$$(4m^2-8m+3)x^2+8(m^2+m-2)x+4(m^2+4m+3)=0$$

să se găsească: 1^0 Valorile parametrului m pentru care ecuaţia are rădăcini egale; 2^0 Valorile lui m pentru care ecuaţia are o rădăcină nulă; 3^0 valorile lui m pentru care ecuaţia are rădăcini egale şi de semne contrare; 4^0 Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei, variind parametrul m de la $-\infty$ la $+\infty$.

22. Idem, pentru ecuaţia:

$$(m^2+9m+10)x^2+2(m^2+3m-10)x+(m^2-3m-10)=0$$

23. Idem, pentru ecuaţia:

$$4(m^2+4m+4)x^2+2(2m^2+3m-2)x+m^2-m=0$$

(Răspuns: $1^0\ m=-2$; $2^0 m=0, m=1$; $3^0 m=\frac{1}{2}, m=-2$)

24. Idem pentru ecuaţia:

$$(63m-1)x^2+80(3m-1)x+8(3m-2)=0$$

25. In ecuaţia:

$$11(m-3)x^2+22(m-5)x+12m-73=0$$

Să se găsească valorile lui m pentru ecuația are: 1^0 rădăcini egale; 2^0 rădăcini egale și de semne contrare; 3^0 rădăcini inverse una alteia; 4^0 Să se discute natura rădăcinilor când m ia toate valorile posibile; 5^0 Să se găsească rădăcinile ecuației pentru $m = 3$.

26. Să se rezolve neegalitatea:

a) $\dfrac{x-1}{4x^2-8x+3} + \dfrac{14-19x}{28x^2+56x-35} > 0$

$\left(R: x < -\dfrac{1}{2};\ \dfrac{11}{12} < x < \dfrac{3}{2};\ \dfrac{5}{2} < x < \dfrac{21}{6} \right)$

b) $\dfrac{-18x+121}{5x^2-45x+70} - \dfrac{3x-5}{2x^2-6x-56} < 0$

27. Să se rezolve ecuația:

a) $4x^4 - 17x^3 + 17x - 4 = 0$

$\left(\textit{Răspuns}: +1, -1, +4, +\dfrac{1}{4} \right)$

b) $18x^4 - 99x^3 + 166x^2 - 99x + 18 = 0$

$\left(R.: \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{2},\ 3,\ \dfrac{1}{3} \right)$

c) $10x^5 - 87x^4 + 227x^2 - 227x^3 + 87x - 10 = 0.$

$\left(R.: 1,\ \dfrac{1}{2},\ 2,\ \dfrac{1}{5},\ 5 \right)$

d) $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

$\left(R.: 3,\ \dfrac{1}{3},\ 2,\ \dfrac{1}{2} \right)$

e) $20x^5 - 169x^4 + 293x^3 + 293x^2 - 169x + 20 = 0.$

$\left(R.: 1,\ 5,\ \dfrac{1}{5},\ 4,\ \dfrac{1}{4} \right)$

f) $25x^5 - 190x^4 + 277x^3 + 277x^2 - 190x + 25 = 0$

($R.$: 1, 5, $\dfrac{1}{5}$ *și 2 rădăcini iraționale*).

$g)$ $\dfrac{-2x^3+3x+1}{x^2-6x+8}-\dfrac{324x^2+45x-26}{55x^2+55x-330}-\dfrac{x^2+x-5}{x^2-x-12}=0.$

(*Răspuns*: *Se ajunge la ecuația* $489x^3-1141x^2+$ $+1141x+489=0$, *care se simplifică prin* 163; $-1, 3, \dfrac{1}{3}$)

28. Să se rezolve ecuația:

$(m^2-1)x^4-(m^4-2m^2+2)x^3+(m^4-2m^2+2)x-$ $-(m^2-1)=0,$

și să se discute semnul rădăcinilor când m variază.

Pentru ce valori ale lui m ecuația are rădăcini multiple.

(*Răspuns*: $-1, +1, m^2-1, \dfrac{1}{m^2-1}$)

29. Idem, pentru ecuația:

$(m^2+m-2)x^3-(m^2+m+7)x^2-(m^2+m+7)x+$ $+(m^2+m-2)=0.$

(*Răspuns*: $-1, \dfrac{m-1}{m+1}, \dfrac{m+2}{m-1}$)

30. In ecuația:

$$x^2-\left(m^2-\frac{3}{2}m-\frac{15}{8}\right)x-\frac{23}{16}\left(m^2-\frac{3}{2}m-\frac{7}{16}\right)=0$$

să se găsească valorile lui m pentru care ecuația are rădăcini egale; 2^0 Să se găsească aceste rădăcini; 3^0 Să se rezolve ecuația în general; se va găsi o valoare independentă de m și una funcție de m; 4^0 Să se discute semnul acesteia de a doua când m variază de la $-\infty$ la $+\infty$.

(*Răspuns*: 1^0 *Se ajunge la ecuația reciprocă*:

$4m^4-12m^3+17m^2-12m+4=0$

3^0 $x'=-\dfrac{23}{4}$ $x''=m^2-\dfrac{3}{2}m-\dfrac{7}{16}$)

31. Idem, pentru ecuația :

$$x^2-\left(m^2-\frac{3}{2}m-\frac{3}{8}\right)x-\frac{11}{16}\left(m^2-\frac{3}{2}m+\frac{5}{16}\right)=0$$

(*Răspuns* : 1^0 *Se ajunge la ecuația reciprocă* :

$4m^4-12m^3+17m^2-12m^2+4=0$. 3^0 $x'=-\frac{11}{16}$

$$x''=m^2-\frac{3}{2}m+\frac{5}{16}\Big)$$

32. Idem, pentru ecuația :

$$x^2-(m^2-2m-17)x-9(m^2-2m-8)=0.$$

(*Răspuns* : 3^0 $x'=-9$; $x''=m^2-2m-8$)

33. Idem pentru ecuația :

$$x^2-(m^2-2m-31)x-16(m^2-2m-15)=0.$$

(*Răspuns* : 3^0 $x'=-16$; $x''=m^2-2m-15$)

34. Să se găsească valorile lui m pentru care ecuația :

$(m^2-3m-10)^2x^2-4(m^2-2m+1)(m^2-3m-10)x+$
$+3m^4-16m^3+26m^2-16m+3=0$

are : 1^0 O rădăcină nulă ; 2^0 Rădăcini egale și de semne contrare ; 3. Rădăcini infinite, una sau două ; 4^0 Rădăcini egale ; 5^0 Să se discute natura și semnul rădăcinilor când m variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

(*Răspuns* : 1^0 $m=3,\frac{1}{3}$ 1 ; $2^0 m=1$; 3^0 $m=5,-3$)

35. Idem, pentru ecuația :

$$(m^2-2m-15)^2x^2-3(m^2-1)(m^2-2m-15)x+$$
$$+2m^4-m^3-6m^2-m+2=0.$$

(*Răspuns* : $1^0 m=-1,\ 2,-\frac{1}{2}$; $2^0 m=+1,-1$; $3^0 m=5,-3$)

36. Să se formeze ecuația de gradul al doilea care admite ca rădăcini : $x'=(m-a)(m-b)$, $x''=c$. Să se

găsească condițiile pe care trebuie să le îndeplinească valorile a, b, c pentru ca realizantul ecuației de gradul al II-lea în x să fie un polinom reciproc în m, iar a, b să fie numere raționale.

37. Să se pună sub formă de sumă de două rădăcini patrate din numere raționale expresiunea:

$$\sqrt{15+\sqrt{56}}$$

Să se generalizeze pentru $\sqrt{a+\sqrt{b}}$

(*Răspuns*: $1+\sqrt{14}$)

38. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x-y=2m^2-m-7 \\ xy=-m^4+m^3+19m^2-49m+30. \end{cases}$$

Să se discute semnul rădăcinilor când m ia toate valorile posibile.

(*Răspuns*: $x=m^2+3m-10$, $y=-(m^2-4m+3)$ *și contrar*)

39. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x-y=2m-3 \\ xy=\dfrac{-3m^2+13m-15}{4} \end{cases}$$

Să se găsească valorile lui m pentru care sistemul are rădăcini reale.

(*Răspuns*: $m<-3$ *și* $m>2$)

40. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{m^2-14m+38}{2} \\ xy=\dfrac{3m^2-18m+22}{4} \end{cases}$$

BCU ALEXANDRU IOAN CUZA UNIVERSITY LIBRARY

Să se găsească valorile lui m pentru care sistemul are rădăcini reale.

(*Răspuns*: $-2 < m < +3$)

41. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8m^4 + \frac{7}{2}m^2 + \frac{9}{4}m + \frac{5}{16} \\ xy = 4m^4 - \frac{11}{4}m^2 - \frac{9}{8}m - \frac{1}{8} \end{cases}$$

și să se discute semnul rădăcinilor când m variază de la $-\infty$ la $+\infty$.

$$\left(\text{Răspuns}: x = 2m^2 + \frac{3}{2}m + \frac{1}{4} \right.$$

$$\left. y = 2m^2 - \frac{3}{2}m - \frac{1}{2} \text{ și contrar} \right)$$

42. Să se găsească două numere astfel că diferența dublurilor lor să fie 148, iar diferența patratelor lor să fie patratul lui 148.

(*Răspuns*: *185, 111*).

43. Un negustor de fructe își așează mandarinele în lăzi: după ce umple atâtea lăzi câte mandarine sunt într'o ladă, umple 5 lăzi mai mici, fiecare conținând cu 20 mandarine mai puțin de cât cele de la început și-i mai rămân 20 mandarine; dacă însă punea în fiecare ladă $\frac{3}{5}$ din numărul pus la început îi trebuiau 140 lăzi ca să cuprindă toate mandarinele. Câte mandarine avea și câte pusese în primele lăzi.

(*Răspuns*: *6720; 80*)

44. Să se construiască dreptele:

a) $3x + 2y - 6 = 0$

b) $2x - 5y - 10 = 0$

c) $-4x + 3y - 12 = 0$

d) $x - 7y + 7 = 0$

45. Să se găsească coordonatele punctului de intersecție a dreptelor:

$$x + 2y + 5 = 0 \qquad y - 3x + 6 = 0.$$

[*Răspuns*: $(1, -3)$]

46. Să se determine ecuația dreptei ce trece prin punctele:

$$(+2, -1) \quad \text{și} \quad (-3, -4)$$

(*Răspuns*: $3x - 5y - 11 = 0$)

47. Să se găsiască coordonatele punctelor de intersecție ale cercului:

$$x^2 + y^2 = 25$$

cu dreapta:

$$y - x - 1 = 0$$

[*Răspuns*: $(3,4)$ *și* $(-4, -3)$]

48. Să se găsiască coordonatele punctelor de intersecție ale parabolei:

$$y = 4x^2 + 5$$

cu dreapta:

$$y - 2x - 5 = 0$$

49. Să se afle coordonatele punctelor de intersecție ale elipsei:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

cu dreapta:

$$y - 2x + 6 = 0$$

50. Să se găsiască coordonatele punctelor de intersecție ale curbelor :

a) $\begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$ R : $(2,3)$; $(3,2)$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$ R : $(3,4)$; $(4,3)$

c) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x - y = 2 \end{cases}$ R : $(5,3)$

51. Să se găsiască coordonatele punctelor de intersecție ale parabolei

$$y = x^2 + x - 6$$

cu dreptele :

1° Axele de coordonate,

2° $x = -1$

3° $y = 14$

4° $y = -9$

5° $y - 2x + 6 = 0$

52. Să se găsiască punctele de intersecție ale curbelor.

a) $\begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ y = \dfrac{10(x^2 - 1)}{3} \end{cases}$ R : $\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$ și $\begin{cases} y = -\dfrac{6}{5} \\ x = \pm \dfrac{4}{5} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ y = \dfrac{5(x^2 - 1)}{2} \end{cases}$ R : $\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$ și $\begin{cases} y = \dfrac{8}{5} \\ x = \pm \dfrac{3}{5} \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = \dfrac{4x - 14}{4x + 1} \\ y = 3x^2 - 5x - 2 \end{cases}$ $\left(R : \text{Ec. reciprocă : } 12x^3 - 17x^2 - 17x + 12 = 0 \right)$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

53. Să se găsiască punctele de intersecție ale curbelor :

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = \dfrac{(7-5m)x + (3m-1)}{x+m} \end{cases}$$

2° Să se discute când m variază dela $-\infty$ la $+\infty$.
3° Să se analizeze cazul $m = 3$; 4° Cazul $m = 7$; 5° Să se reprezinte cazul $m = \dfrac{15}{2}$.

(*Răspuns* : 1° *3 puncte de intersecție* : $(-1,8)$ *și două reale dacă* $m \leq 3$ *sau* $m \geq 7$; 3° $(-1,8)$ *și 2 puncte confundate* $(1,0)$; 4° *3 puncte confundate* $(-1,8)$

54. Să se construiască parabolele :

a) $y = x^2 - 8x + 15$
b) $y = -x^2 + 1$
c) $y = x^2 + 1$
d) $y = -x^2 - 4$
e) $y = x^2 - 4x + 4$
f) $y = -x^2 - 2x - 1$
g) $y = x^2 + x - 2$
h) $y = -x^2 + x + 6$
i) $y = x^2 + 2x + 5$
j) $y = -x^2 + 2x - 2$

55. Să se rezolve ecuația, în privința lui y :

$$x^3y^4 - x(x^4 + x^3 + x + 1)\ y^3 + (x^6 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 1)y^2 - x(x^4 + x^3 + x + 1)\ y + x^3 = 0$$

2° Să se reprezinte curbele reprezentate de soluțiuni, acelea de gr. I sau al II-lea.

$$\left(\textit{Răspuns} : \ y = x \quad y = \frac{1}{x} \quad y = x^2 \quad y = \frac{1}{x^2}\right)$$

56. Să se rezolve ecuația în privința lui y:

$$(x-3)y^2-(x^2-6x+10)y+x-3=0.$$

2^0 Să se afle valorile lui x pentru care ecuația are rădăcini egale; 3^0 Să se afle aceste rădăcini; 4^0 Să se construiască curbele reprezentate de cele două soluțiuni; 5^0 Să se interpreteze geometric valorile lui x care conduc la rădăcini egale pentru y.

(*Răspuns*: 1^0 $y=x-3$, $y=\frac{1}{x-3}$;

2^0 $x=2$, $x=4$; 3^0 $y=-1$, $y=1$;

5^0 *Puncte de intersecție ale dreptei* $y=x-3$ *cu hiperbola* $y=\frac{1}{x-3}$).

57. Să se rezolve ecuația în privința lui y:

$$(x^2-1)y^4-(x^4-2x^2+2)y^3+(x^4-2x^2+2)y-(x^2-1)=0$$

și să se construiască curbele reprezentate de rădăcini.

($Răspuns: y=1;\ y=-1;\ y=x^2-1;\ y=\frac{1}{x^2-1}$)

58. Idem, pentru ecuația:

$$(x+1)y^4-(x^2+2x+2)y^3+(x^2+2x+2)y-(x+1)=0.$$

($Răspuns: y=1;\ y=-1;\ y=x+1;\ y=\frac{1}{x+1}$)

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

GEOMETRIE.

Probleme rezolvate.

1. *Se cunoaşte perimetrul 2p al unui dreptunghiu. Să se afle dimensiunile dreptunghiului, dacă aria sa are atâţia m² cât este diferenţa dintre produsul jumătăţii perimetrului prin 11 şi 72; 2⁰ Să se aplice la cazul 2p = 144; 3⁰ Să se afle valoarea ce trebue să aibă perimetrul pentru ca dreptunghiul să se transforme în patrat şi să se afle latura patratului.*

1⁰ Necunoscutele sunt dimensiunile dreptunghiului: însemn lungimea cu x, lăţimea cu y. Trebuesc 2 ecuaţii pentru determinarea lor. Caut realaţiuni între datele prôblemei şi necunoscute. Perimetrul este $2p$, adică:

$$2x + 2y = 2p.$$

Aria este xy; jumătatea perimetrului, p; produsul ei prin 11, $11\ p$; diferenţa între această cantitate şi 72 este $11p - 72$; deci:

$$xy = 11\,p - 72$$

Deci sistemul ce trebue rezolvat este:

$$\begin{cases} x + y = p \\ xy = 11\ p - 72 \end{cases}$$

sistem de gr. II, care se rezolvă simplu printr'un artificiu: se identifică necunoscutele cu rădăcinile unei

ecuații de gradul al II-lea; coeficienții ecuației se află cunoscând suma și produsul rădăcinilor și relațiile dintre sumă, produs și coeficienți. Anume: dacă coeficientul necunoscutei de gr. II este 1, ceia ce se poate obține întotdeauna, coeficientul necunoscutei de gr. I este suma rădăcinilor de semn schimbat; termenul liber de necunoscută este produsul rădăcinilor. Fie z acea necunoscută; deci:

$$z^2 - pz + (11p - 72) = 0$$

ecuație ce se rezolvă după formula:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4(11p - 72)}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 44p + 288}}{2}$$

Cele două rădăcini sunt dimensiunile dreptunghiului Problema nu e posibilă decât în cazul când sunt îndeplinite condițiile:

$$\text{I.} \quad p^2 - 44p + 288 > 0$$

condiție, ca rădăcinile să fie reale;

$$\text{II.} \quad p > \sqrt{p^2 - 44p + 288}$$

condiție ca amândouă rădăcinile să fie pozitive, dimensiunile dreptunghiului fiind cantități esențial pozitive. Pentru a rezolvi neegalitatea I, membrul I fiind un trinom de gradul al II-lea, trebue găsite rădăcinile trinomului, semnul trinomului depinzând de rădăcini și de coeficientul necunoscutei de gradul al II-lea, aci egal cu 1.

$$p^2 - 44p + 288 = 0$$

$$p = -b' \pm \sqrt{b'^2 - c}$$

$$p = 22 \pm \sqrt{484 - 288} = 22 \pm \sqrt{196} =$$

$$= 22 \pm 14$$

$$p' = 8 \quad p'' = 36$$

$$p^2 - 44p + 288 = (p - 8)(p - 36)$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{1.96} & 14 \\ \hline 9.6 & 24 \\ \hline 0 & 4 \\ \hline & 96 \end{array}$$

Trinomul având acelaş semn ca primul său termen, pentru valorile lui p mai mici ca cea mai mică rădăcină sau mai mari ca cea mai mare rădăcină, neegalitatea I se transformă în neegalitățile echivalente cu ea :

$$I') \; p < 8 \quad \text{sau} \quad p > 36$$

Negalitatea II adusă la formă raţională este :

$$p^2 > p^2 - 44p + 288 \text{ sau}$$

$$44p > 288$$

$$11p > 72$$

$$II') \quad p > \frac{72}{11}$$

Relaţiile I', II' trebuind să fie îndeplinite în acelaş timp, problema nu e posibilă decât când p îndeplineşte condiţiile :

$$\frac{72}{11} < p < 8 \quad \text{sau}$$

$$p > 36$$

2^0 $p = 72$ Problema este posibilă.

$$z = \frac{72 \pm \sqrt{72^2 - 44 \times 72 + 288}}{2} = \frac{72 \pm \sqrt{72 \times 4(18 - 11 + 1)}}{2} =$$

$$= \frac{72 \pm \sqrt{72 \times 4 \times 8}}{2} = \frac{72 \pm \sqrt{2^8 \times 3^2}}{2}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$z = \frac{72 \pm 2^4 \times 3}{2} = \frac{72 \pm 48}{2}$$

$$z' = x = \frac{120}{2} = 60 \ m$$

$$z'' = y = \frac{24}{2} = 12 m.$$

3° Pentru ca dreptunghiul să se transforme în patrat, ar trebui ca dimensiunile să fie egale, adică ecuația în z să aibă rădăcinile egale, ceia ce se întâmplă când realizantul este nul:

$$p^2 - 44p + 288 = 0$$

a cărui rădăcini sunt $p = 8$ și $p = 36$ adică $2p = 16$ sau $2p = 72$

Pentru fiecare din aceste cazuri ,latura patratului este dată de formula:

$$z = \frac{p}{2}$$

adică sau $l_4 = 4$ sau $l_4 = 18$.

2. *Aria unui triunghiu dreptunghiu este funcție de un parametru m dată de expresiunea:* $\frac{3m^3}{2} + 10m^2 + \frac{3m}{2} - 55$; *iar ipotenuza aceluiaș triunghiu este egală cu latura unui patrat a cărui arie în funcție de acelaș parametru este dată de expresiunea:* $m^4 + 6m^3 - 2m^2 + 6m + 221$. *Să se găsească catetele triunghiului dreptunghiu în funcție de m și să se reprezinte variația lor când m variază dela* $-\infty$ *la* $+\infty$.

Fie x una din catele și y cealaltă. Aria triunghiului este $\frac{xy}{2}$, deci una dintre ecuații este:

$$xy = 3m^3 + 20m^2 + 3m - 110$$

Ipotenuza este cunoscută, anume patratul ei este egală cu aria patratului cunoscută. Aplicând *teorema lui Pythagora* se găsește a doua ecuație :

$$x^2 + y^2 = m^4 + 6m^3 - 2m^2 + 6m + 221.$$

Deci trebue de rezolvat sistemul. :

$$\begin{cases} xy = 3m^3 + 20m^2 + 3m - 110 \\ x^2 + y^2 = m^4 + 6m^3 - 2m^2 + 6m + 221 \end{cases}$$

sistem de gradul al II-lea, ce se rezolvă printr'un artificiu : se urmărește să se găsiască suma necunoscutelor ; se obține patratul sumei adunând ecuația a II-a cu prima amplificată cu 2 :

$$(x + y)^2 = m^4 + 12m^3 + 38m^2 + 12m + 1$$

de unde :

$$x + y = \sqrt{m^4 + 12m^3 + 38m^2 + 12m + 1}$$

Rădăcina se extrage, dacă se poate descompune polinomul în factori simpli patratici, pentru care lucru trebue de găsit rădăcinile polinomului, adică rădăcinile ecuației obținute anulând polinomul.

$$m^4 + 12m^3 + 38m^2 + 12m + 1 = 0$$

ecuație reciprocă. Incerc dacă nu admite rădăcinile ± 1. Pe $+1$, nu-l admite fiind toți temenii pozitivi.

$$(m^4 + 12m^3 + 38m^2 + 12m + 1)_{m=-1} =$$
$$= 1 - 12 + 38 - 12 + 1 \neq 0$$

Ecuația nu admite nici rădăcina $m = -1$
Impart prin m^2 :

$$\left(m^2 + \frac{1}{m^2}\right) + 12\left(m + \frac{1}{m}\right) + 38 = 0$$

Fac substituția $m + \frac{1}{m} = z$. de unde rezultă

$$m^2 + \frac{1}{m^2} = z^2 - 2$$

$$z^2 + 12z + 36 = 0$$

Se observă că membrul I este un patrat prefect, conținând două patrate perfecte z^2 și 36 și dublul produs al rădăcinilor lor $(z, 6)$ deci :

$$z^2 + 12z + 36 = (z + 6)^2$$

Așa că nu mai e necesar să se rezolve complect ecuația în m, fiindcă s'a constatat că polinomul e patrat perfect.

Făcând substituția se obține :

$$m^4 + 12m^3 + 38m^2 + 12m + 1 = m^2\left[(m^2 + \frac{1}{m^2}) + 12(m + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{m}) + 38\right] = m^2(z^2 + 12z + 36) = m^2(z + 6)^2 =$$

$$= m^2(m + \frac{1}{m} + 6)^2 = (m^2 + 6m + 1)^2$$

deci sistemul este :

$$\text{I)} \quad \begin{cases} x + y = m^2 + 6m + 1 \\ xy = 3m^3 + 20m^2 + 3m - 110 \end{cases} \quad \text{sau}$$

$$\text{II)} \quad \begin{cases} x + y = -(m^2 + 6m + 1) \\ xy = 3m^3 + 20m^2 + 3m - 110. \end{cases}$$

Pentru rezolvirea sistemului I) se formează o ecuație de gradul al II-lea care admite pe x și y ca rădăcini :

$$z^2 - (m^2 + 6m + 1)z + (3m^3 + 20m^2 + 3m - 110) = 0$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z = \frac{m^2 + 6m + 1}{2} \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{m^4 + 36m^2 + 1 + 12m^3 + 2m^2 + 12m - 12m^3 - 80m^2 - 12m + 440}}{2}$$

$$z = \frac{m^2 + 6m + 1 \pm \sqrt{m^4 - 42m^2 + 441}}{2}$$

$\sqrt{4.41}\,|\,21$
$=41\,|\,41$
$0\,|$

Polinomul de sub radical este patrat perfect, conținând două patrate perfecte m^4 și 441 și dublul produs al rădăcinilor celor două patrate (m^2 și 21).

$$z = \frac{m^2+6m+1 \pm \sqrt{(m^2-21)^2}}{2} = \frac{m^2+6m+1 \pm (m^2-21)}{2}$$

$$z' = x = \frac{m^2+6m+1+m^2-21}{2} = m^2+3m-10.$$

$$z'' = y = \frac{m^2+6m+1-m^2+21}{2} = 3m+11$$

sau contrar, ceea ce nu conduce la alt triunghiu dreptunghiu. Sistemul II conduce la ecuația :

$$z^2 + (m^2+6m+1)z + 3m^3 + 20m^2 + 3m - 110 = 0$$

$$z = \frac{-(m^2+6m+1) \pm \sqrt{(m^2-21)^2}}{2} =$$

$$= \frac{-(m^2+6m+1) \mp (m^2-21)}{2}$$

$$z' = x = \frac{-m^2-6m-1+m^2-21}{2} = -3m-11.$$

$$z'' = y = \frac{-m^2-6m-1-m^2+21}{2} = -m^2-3m+10$$

Deci algebric, sunt două soluțiuni :

I) $\begin{cases} x = 3m+11 \\ y = m^2+3m-10 \end{cases}$ II) $\begin{cases} x = -(3m+11) \\ y = -(m^2+3m-10). \end{cases}$

Pentru ca soluțiile să fie și soluții ale problemei geometrice este necesar ca rădăcinile x și y să fie pozitive în acelaș timp. Cum pentru fiecare valoare a parametrului m există 2 soluții egale și de semne contrare pentru x și y, problema geometrică nu admite decât pe una din aceste soluții și pe aceasta numai în cazul când x și y sunt pozitivi pentru aceeaș valoare a lui m. Pentru aceasta trebue de văzut semnul lui x (a binomului $3m+11$)

și a lui y (a trinomului $m^2+3m-10$) când m variază. Semnul depinde de rădăcinile polinoamelor.

$$3m+11=0$$

$$m=-\frac{11}{3}$$

$$m^2+3m-10=0$$

$$m=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm 7}{2}$$

$$m'=-5 \quad m''=2.$$

$$y=m^2+3m-10=(m+5)(m-2).$$

	m	$-\infty$	-5	$-4,1$	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{3}{2}$	0	$+2$	$+4,1$	$+\infty$
	$x'=3m+11$			$-1,1$	$-0+$	$\frac{13}{2}+$	$11+$		$+23,1+$	
I)	$y'=m^2+3m-10$	$+0-$		$-1,1-$		$-\frac{49}{4}-$	$-10-$	$0+$	$23,1+$	
	$x''=-(3m+11)$	$+$	$+$		$+0-$					
	$y''=-(m^2+3m-10)$	$-0+$		$+$	$+$	$+$	$+$	$0-$		

Deci există triunghiul care să satisfacă la condițiile problemei pentru:

$$m>2$$

cele două catete fiind $x=3m+11$ $y=m^2+3m-10$, și pentru:

$$-5<m<-\frac{11}{3}$$

cele două catete fiind: $x=-(3m+11)$ $y=-(m^2+3m-10)$

Pentru a reprezenta variația catetelor, se va considera m ca abscisă și se va însemna cu x, iar x', y' x'', y'' ca ordonată, y.

Ecuația $y=3x+11$ reprezintă o linie dreaptă care tae axa $0x$ în punctul cu abscisa $x=-\frac{11}{3}$, axa Oy ($x=0$) în punctul cu ordonata $y=11$. Introduc și această valoare în tabloul T ca și toate cele importante ce se vor mai prezenta. Ecuația $y=x^2+3x-10$ reprezintă o parabolă, care tae axa Ox în punctele cu abscisele $x=-5$, $x=2$; axa Oy în punctul cu ordonata -10. Altă valoare importantă este aceea pentru care funcția este maximă sau minimă, care se obține punând pe y sub forma unei sume algebrice de patrate.

$$y=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-10-\frac{9}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$$

Funcția fiind o diferență între două patrate, descăzutul fiind variabil, va avea valoarea minimă pentru cea mai mică valoare a descăzutului, adică zero (fiind patrat) deci $x=-\frac{3}{2}$ $y=-\frac{49}{4}$ sunt coordonatele celui mai de jos punct al parabolei. Alte valori importante sunt punctele de intersecție ale acestor două curbe (valorile lui m pentru care triunghiul dreptunghiu este isoscel), care se obține rezolvând sistemul format de ecuațiile celor două curbe:

$$\begin{cases} y=3x+11 \\ y=x^2+3x-10. \end{cases}$$

Eliminând pe y:

$$x^2+3x-10=3x+11$$
$$x^2=21$$
$$x=\pm\sqrt{21}=\pm 4,\!f.$$

Ecuația $y=-(3x+11)$ reprezintă o dreaptă simetrică cu dreapta $y=3x+11$ față de axa Ox, pentrucă pentru fiecare valoare a abscisei, cele două ordonate sunt egale și de semne contrare; pentru aceleași motive

parabola $y = -(x^2 + 3x - 10)$ este simetrică cu parabola $y = x^2 + 3x - 10$ față de axa Ox.

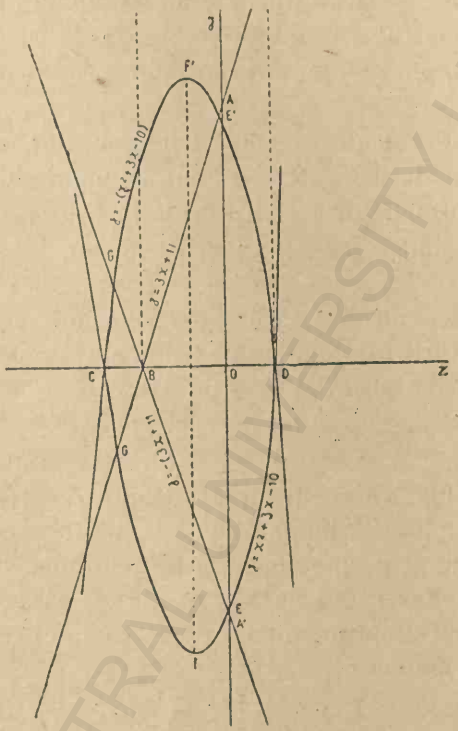

Fig. 16.

In figură, pentru orice valoare $x > 2$ distanțele pe paralele la Oy de la axa Ox până la dreapta $y = 3x + 11$ și până la parabola $y = x^2 + 3x - 10$ reprezintă cele două catete ale triunghiului dreptunghiu. Pentru orice valoare a parametrului $-5 > x > -\frac{11}{3}$ distanțele pe paralele la Oy de la axa Ox până la dreapta $y = -(3x + 11)$ și la parabola $y = -(x^2 + 3x - 10)$ reprezintă catetele triunghiului dreptunghiu.

Probleme de rezolvat.

1. Să se găsească laturile unui triunghiu dreptunghiu, dacă perimetrul este de 36 cm și aria de 54 cm².

(*Răspuns*: *9, 12, 15 cm*)

2. Să se calculeze ariile triunghiurilor echilaterale, cari au ca laturi catetele unui triunghiu dreptunghiu cu ipotenuza de 35 cm și aria de 294 cm²?

(*Răspuns*: *catetele*: *21 cm, 28 cm*).

3. Să se calculeze ariile exagoanelor regulate, cari au ca laturi catetele unui triunghiu dreptunghiu cu ipotenuza de 30 cm și aria de 216 cm²

(*Răspuns*: *catetele*: *18 cm, 24 cm*)

4. Într'un triunghiu dreptunghiu o catetă este de 15 cm; iar aria triunghiului format de acea catetă, de proecția ei pe ipotenuză și de înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este de 54 cm². Să se găsească laturile triunghiului dreptunghiu și aria exagonului regulat, construit pe ipotenuză.

(*Răspuns*: *1) 25 și 15*; *2) 18,75 și 11,25*)

5. Un trapez isoscel este circumscris unui cerc cu raza de 2 dm; aria trapezului este de 34 dm². Să se găsească laturile trapezului.

(*Răspuns*: $B=16\ dm$; $b=1\ dm$; $L=\frac{17}{2}\ dm = 8{,}5$)

6. Un trapez isoscel este circumscris unui cerc cu raza de 4 dm; aria trapezului este de 514 dm. Să se găsească laturile trapezului.

($B = 128\ dm$; $b = 0{,}5\ dm$; $L = 64{,}25\ dm$)

7. Raza unui cerc satisface ecuației :

$$x^2 + 16x - 17 = 0.$$ (Socotită în dm)

Să se afle aria figurii mărginită de două coarde paralele, una egală cu latura triunghiului echilateral înscris, alta egală cu latura patratului înscris, situate de aceeași parte a centrului, și de arcele cuprinse între ele.

(*Răspuns* : $R = 1$)

8. Aria patrulaterului, format de tangentele dintr'un punct exterior la un cerc și de razele la punctele de contact este de 2700 cm²; iar coarda de contact este de 72 cm. Să se găsească raza cercului și aria triunghiului echilateral înscris.

(*Răspuns* : $R = 60$ *cm sau* $R = 45$ *cm*)

9. Ipotenuza unui triunghiu dreptunghiu socotită în dm. satisface ecuației :

$$x^2 - 84x - 85 = 0$$

aria triunghiului dreptunghiu este de 6 ori aria unui patrat cu latura de 17 dm. Să se găsească : 1^0 Laturile triunghiului; 2^0 aria exagonului regulat construit pe cateta mare; 3^0 Aria triunghiului echilateral construit pe cateta mică.

(*Răspuns* : *Ipotenuza este de 85 dm*)

10. Diferența între aria unui triunghiu echilateral și aria dreptunghiului ce are ca lungime raza cercului circumscris triunghiului și ca lățime 5 cm. este de $16\sqrt{3}$ cm². Să se găsească latura triunghiului echilateral și aria exagonului regulat înscris în cercul înscris triunghiului.

(*Răspuns* : $L_3 = 12$ *cm*)

11. Diferența între aria unui exagon regulat și aria dreptunghiului, ce are ca lungime latura triunghiului echilateral înscris în același cerc ca exagonul și ca lățime 24 cm., este de $54\sqrt{3}$ cm². Să se găsească latura exagonului regulat și aria triunghiului echilateral înscris în cercul înscris exagonului.

(*Răspuns*: $L_6 = 18$ *cm*)

12. Perimetrul unui dreptunghiu este $2p$, iar aria mărită cu 1 m² dă același număr de m² câți metri sunt în $\frac{5}{8}$ din perimetru. Să se afle: *1°* Dimensiunile dreptunghiului în funcție de perimetru; *2°* Să se aplice la cazul când perimetrul este de 10 m; *3°* Să se afle valoarea ce trebue să aibă perimetrul pentru ca dreptunghiul să se transforme în patrat; *4°* Să se calculeze latura patratului.

(*Răspuns*: *2) 3,5 m. și 1,5 m.*; *3) 2 m. sau 8 m.*)

13. Se cunoaște perimetrul $2p$ al unui dreptunghiu. Să se afle dimensiunile dreptunghiului dacă aria are atâția m^2 cât este diferența dintre produsul jumătății perimetrului prin 8 și 48; *2°* Să se aplice la cazul $2p = 66$; *3°* Să se afle ce valoare trebue să aibă perimetrul pentru ca dreptunghiul să se transforme în patrat; *4°* Să se afle, în acest caz, latura patratului.

(*Răspuns*: *3° 24 m. sau 8 m.*)

14. Intr'un triunghiu dreptunghiu, al cărui perimetru este dat, aria este $\frac{6}{5}$ din aria unui patrat ce ar avea ca latură $\frac{1}{6}$ din perimetrul triunghiului. Să se găsească laturile triunghiului dreptunghiu în funcție de perimetru și să se reprezinte variația lor.

$$\left(\textit{Răspuns}: \; a = \frac{13p}{30}, \quad b = \frac{2p}{5}, \quad c = \frac{p}{6}. \right)$$

15. Intr'un triunghiu dreptunghiu, al cărui perimetru este dat, aria este $\frac{2}{3}$ din aria unui patrat, ce ar avea ca latură $\frac{1}{4}$ din perimetrul triunghiului. Să se găsească laturile triunghiului dreptunghiu în funcție de perimetru și să se reprezinte variația lor.

$$\left(\textit{Răspuns}: \; a = \frac{5p}{12}, \quad b = \frac{p}{3}, \quad c = \frac{p}{4}. \right)$$

16. Se cunoaște perimetrul p al unui triunghiu dreptunghiu; iar suma ariilor a 3 dreptunghiuri, ce au ca laturi: unul, cele două catete; iar celelalte, ipotenuza și câte o catetă, este de 511 ori aria unui patrat a cărui latură este $\frac{1}{40}$ din perimetrul triunghiului dreptunghiu. Să se găsească laturile în funcție de perimetru și să se reprezinte variația lor.

$$\left(\textit{Răspuns}: \; a = \frac{17p}{40}, \quad b = \frac{3p}{8}, \quad c = \frac{p}{5}. \right)$$

17. Se cunoaște perimetrul p al unui triunghiu dreptunghiu; iar suma ariilor a 3 dreptunghiuri, ce au ca laturi: unul, cele două catete; iar celelalte, ipotenuza și câte o catetă, este de 943 de ori aria unui patrat a cărui latură este $\frac{1}{56}$ din semiperimetru. Să se găsească laturile în funcție de perimetru și să se reprezinte variația lor.

$$\left(\textit{Răspuns}: \; a = \frac{25p}{56}, \quad b = \frac{3p}{7}, \quad c = \frac{p}{8}. \right)$$

18. Se cunoaște perimetrul p al unui triunghiu dreptunghiu; iar suma ariilor patratelor construite pe laturi întrece fracțiunea $\frac{5}{6}$ din aria unui patrat ce ar avea

ca latură $\frac{1}{2}$ din perimetru, cu aria unui dreptunghiu ce are ca dimensiuni ipotenuza și $\frac{1}{3}$ din perimetru. Să se găsiască laturile triunghiului dreptunghiu în funcție de perimetru; să se reprezinte variația lor și să se construiască grafic triunghiul pentru o valoare arbitrară dată perimetrului.

$$\left(\textit{Răspuns}: \frac{5p}{12}; \frac{p}{3}; \frac{p}{4} \right)$$

19. Aria unui triunghiu dreptunghiu este funcție de un parametru m dată de expresiunea: $m^3 - \frac{10\,m^2}{3} + m$; iar ipotenuza este $\frac{1}{3}$ din latura unui patrat a cărui arie în funcție de același parametru m este dată de expresiunea: $9m^4 - 60m^3 + 154\,m^2 - 60m + 9$. Să se calculeze catetele în funcție de m și să se reprezinte variația lor.

$$\left(\textit{Răspuns}: \; x = 2m \;\; y = \frac{3m^2 - 10\,m + 3}{3}. \right)$$

20. Aria unui triunghiu dreptunghiu este în funcție de un parametru m dată de expresiunea: $\frac{m^3}{2} + m^2 + \frac{m}{2}$; iar ipotenuza aceluiaș triunghiu dreptunghiu este egală cu latura unui patrat a cărui arie în funcție de același parametru are expresiunea: $m^4 + 2m^3 + 2m^2 + 2m + 1$. Să se găsească catetele triunghiului în funcție de m și să se reprezinte variația lor.

(*Răspuns*: $x = m(m + 1)$ $y = m + 1$).

CLASA A VI-a.

TRIGONOMETRIE.

Probleme rezolvate.

1. *Să se rezolve ecuația:*

$$\frac{\sin x \, tg^2 x}{\sin^2 x} - \frac{2}{cosec^2 x} - \sin^2 x + 8 \sin x = 2 + \sin x \cos^2 x + \frac{4}{1 + cotg^2 x}$$

Trebue de găsit arcul x care satisface acestei ecuații. Se va găsi mai întâi o linie trigonometrică a acelui arc.

Se va exprima toate liniile trigonometrice a arcului x în funcție de una singură, anume aceia care intră mai mult în ecuație, sau aceia care nu introduce expresiuni irationale, dacă e posibil. Aici se va exprima toate liniile trigonometrice în funcție de sinus și fiindcă intră de mai multe ori și fiindcă, celelalte fiind patratice, nu se vor introduce radicali.

$$\sin x \times \frac{\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}}{\frac{1}{1 - \sin^2 x}} - \frac{2}{\frac{1}{\sin^2 x}} - \sin^2 x + 8 \sin x = 2 + \sin x (1 - \sin^2 x) + \frac{4}{1 + \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}}$$

Se efectuiază operațiile :

$$\sin^3 x - 2\sin^2 x - \sin^2 x + 8\sin x = 2 + \sin x - \\ - \sin^3 x + 4\sin^2 x$$

Reduc termenii asemenia :

$$2\sin^3 x - 7\sin^2 x + 7\sin x - 2 = 0$$

In privința sinusului de x, ecuația este *reciprocă*, având coeficienții termenilor extremi și a celor egal depărtați de extremi, egali și de semne contrare. Fiind de grad nepereche, trebue să admită sau rădăcina $+1$ sau -1.

Admite rădăcina $+1$.

Pentru a găsi celelalte rădăcini se împarte polinomul din primul membru prin $\sin x - 1$, prin care e divizibil.

$$2\sin^3 x - 7\sin^2 x + 7\sin x - 2 = (\sin x - 1)(2\sin^2 x - 5\sin x + 2)$$

egalând cu zero, rezultă : 1^0 $\sin x = 1$ sau

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

$$\sin x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\sin x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \text{ adică :}$$

$$2^0 \quad \sin x = 2$$

$$3^0 \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

Apoi va trebui să se rezolve o ecuație de forma :

$$\sin x = a$$

Va trebui să găsesc mai întâi o soluție particulară a acestei ecuații, fie ea x_0 ; ecuația va deveni :

$$\sin x = \sin x_0$$

care se transformă într'o ecuație algebrică exprimând relațiunea care există între două arce care au acelaș

sinus : două arce care au același sinus sunt astfel încât, sau suma lor este un număr nepereche de π, sau diferența lor este un număr pereche de π. Pentru ecuația :

1^0 o soluție particulară este $x_0 = \frac{\pi}{2}$ (90^0), deci se transformă în :

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{2} \text{ de unde :}$$

$$\text{sau } 1') \quad x + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\pi$$

$$\text{sau } 1'') \quad x - \frac{\pi}{2} = 2k\pi$$

unde k are orice valoare întreagă.

Ecuația 2^0 este imposibilă : nu există arc care să aibă sinusul egal cu 2, de oarece valoarea maximă pentru sinus este $+1$.

Ecuația 3^0 admite soluția particulară :

$$x_0 = \frac{\pi}{6} \ (30^0) \text{ deci :}$$

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{6} \text{ de unde :}$$

$$\text{sau } 3') \ x + \frac{\pi}{6} = (2k'+1)\pi$$

$$\text{sau } 3'') \ x - \frac{\pi}{6} = 2k'\pi$$

unde k' poate avea toate valorile întregi posibile.

Deci ecuația dată are o infinitate de soluțiuni cuprinse în una din expresiunile următoare rezolvite în privința lui x :

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k'\pi$ care nu dă valori diferite de prima

$x = \frac{5\pi}{6} + 2k''\pi$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k'''\pi$

k, k', k'', k''' reprezentând numere întregi oricare.

*

2. *Să se rezolve ecuația în* x :

$$\frac{cotg^2 x}{tg^2 x} - 4\ sec^2\alpha\ cosec^2 x + \frac{4}{cos^2\alpha} - sin^2\alpha\ cotg^2 x + 4tg^2\alpha = 0$$

1° în general; 2° pentru $\alpha = 47^0\ 29'\ 36''$; *3° în acest caz, să se găsească rădăcinile pozitive mai mici ca* 180^0.

1. Exprim toate liniile trigonometrice a arcului necunoscut x în funcție de $cotg\ x$ și pentru simplitate, ca să nu mai fie numitori exprim pe $\frac{1}{cos^2\alpha}$ în funcție de $sec\alpha$.

$cotg^4 x - 4\ sec^2\alpha\ (1 + cotg^2 x) + 4sec^2\alpha - sin^2\alpha\ cotg^2 x + 4\ tg^2\alpha = 0$ adică :

$$cotg^4 x - (4sec^2\alpha + sin^2\alpha)\ cotg^2 x + 4tg^2\alpha = 0.$$

Ecuație bipatratică în $cotg\ x$. :

$$cotg^2 x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$cotg^2 x = \frac{4\ sec^2\alpha + sin^2\alpha \pm}{2}$$

$$\pm \frac{\sqrt{16\ sec^2\alpha + 8\ sec^2\alpha\ sin^2\alpha + sin^4\alpha - 16\ tg^2\alpha}}{2}$$

Exprim $tg\ \alpha$ în funcție de $sin\ \alpha$ și $sec\ \alpha$.

$$tg\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} = sin\ \alpha\ sec\ \alpha$$

$$\operatorname{cotg}^2 x = \frac{4\sec^2\alpha + \sin^2\alpha}{2} \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{16\sec^2\alpha + 8\sec^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha - 16\sin^2\alpha\sec^2\alpha}}{2} =$$

$$= \frac{4\sec^2\alpha + \sin^2\alpha \pm \sqrt{(4\sec^2\alpha - \sin^2\alpha)^2}}{2}$$

$$\operatorname{cotg}^2 x = \frac{4\sec^2\alpha + \sin^2\alpha \pm (4\sec^2\alpha - \sin^2\alpha)}{2}$$

$\operatorname{cotg}^2 x = 4\sec^2\alpha$ și $\operatorname{cotg}^2 x = \sin^2\alpha$

Deci ecuația are soluțiile:

$\operatorname{cotg} x = \pm 2\sec\alpha$

$\operatorname{cotg} x = \pm \sin\alpha$

ecuații de forma:

$\operatorname{cotg} x = a$

care se rezolvă găsind o soluție particulară x_0 și apoi exprimând că două arce care au aceiaș cotangentă sunt astfel că diferența lor este un număr întreg de π.

2° I $\operatorname{cotg} x = +2\sec 47°29'36''$ II $\operatorname{cotg} x = -2\sec 47°29'36''$

III $\operatorname{cotg} x = \sin 47°29'36''$ IV $\operatorname{cotg} x = -\sin 47°29'26''$

I. Se găsește o soluție particulară, aplicând logaritmii: $\log \operatorname{cotg} x_0 = \log 2 + \log \sec 47° 29' 36'' = \log 2 +$

$$+ \log \frac{1}{\cos 47° 29' 36''} = \log 2 - \log \cos 47° 29' 36''$$

$\log 2 = 0{,}30103$

$\log \cos 47° 29' 36'' = \bar{1}{,}82974$

$\log \cos 47° 30' \ldots\ldots \bar{1}{,}82968$

$D = 14 \quad -20'' \ldots\ldots + \ldots\ldots 4{,}7$

$d = 24'' \quad -\ 4'' \ldots\ldots + \ldots\ldots 0{,}93$

$\log \cos 47° 29' 36'' = \bar{1}{,}8297363$

$\log \operatorname{cotg} x_0 = 0{,}30103 - \bar{1}{,}82974 = 0{,}30103 + 0{,}17026 =$

$= 0{,}47129.$

$x_0 = 18^0\ 40'\ 1''$

$0{,}47130 \ldots\ldots 18^0\ 40'$

$D=42 \quad -0{,}7 \ldots\ldots\ldots\ 1''$

$d=-1 \quad 0{,}47129 \ldots\ldots 18^0\ 40'\ 1''$

Soluția generală rezultată din această soluție particulară este: I') $x = 18^0 40' 1'' + 180k$, k fiind un număr întreg.

II. Arcul x_0, rădăcina particulară a acestei ecuații având *cotg.* negativă nu se poate găsi aplicând logaritmii. Se caută un arc care să aibă aceiaș cotangentă în valoare absolută, aci este $-x$.

Ecuația se transformă în:

$$cotg\,(-x) = 2\,sec\,47^0\,29'\,36''$$

Astfel ecuația este aceiaș ca I cu diferența că x este înlocuit prin $-x$, deci o soluție particulară este:

$$x_0 = -18^0\,40'\,1''$$

și soluția generală:

$$\text{II')}\quad x = -18^0\,40'\,1'' + 180\,k'$$

III. Se aplică logaritmii:

$log\ cotg x_0 = log\ sin\ 47^0\,29'\,36'' = \bar{1}{,}86759.$

$47^0\,29' \ldots\ldots\ldots\ \bar{1}{,}86752$

$D = 11 \quad 36'' \ldots\ldots\ldots\ 7$

$d = 36'' \quad 47^0\,29'\,36'' \quad \bar{1}{,}86759$

$$\frac{60''}{36''} = \frac{11}{x}$$

$$x = \frac{\overset{6}{\cancel{36}} \times 11}{\cancel{60}} = \frac{66}{10} = 6{,}6$$

$x_0 = 53^0\ 36'\ 6''$

$\bar{1}{,}86762 \ldots\ldots\ 53^0\ 36'$

$D = 26 \quad -2{,}60 \ldots\ \ 6''$

$d = -3 \quad \bar{1}{,}86759 \ldots\ldots\ 53^0\ 36'\ 6''$

Deci soluția generală :

III′ $x = 53^0\,36'\,6'' + 180\,k$, k, număr întreg.

Ecuația IV conduce la soluția :

IV′) $x = -53^0 36'6'' + 180\,k$, k fiind un număr întreg.

3° In special soluțiile $< 180^0$ se obțin făcând în I′, $k=o$; în II′, $k'=1$; în III′, $k=0$; în IV′ $k=1$. anume :

$$x_1 = 18^0 40'\,1' \quad x_2 = 161^0 19'59'' \quad x_3 = 53^0 36'6''$$
$$x_4 = 126^0 23'54''$$

3. *Să se rezolve ecuația :*

$$4sin^4x - 2sin^2x + 2cos2x - 3sin^2 2x - 2cos^2x + 1 = 0,$$

comparându-se o linie trigonometrică care satisface la această ecuație cu aceiaș linie trigonometrică a arcului de 15°.

Se va căuta să intre linii trigonometrice ale unui singur arc necunoscut, exprimând $sin\ 2\,x$, $cos\ 2\,x$ în funcție de liniile trigonometrice ale arcului x, anume :

$$sin2x = 2sinxcosx \qquad cos2x = cos^2x - sin^2x$$

$$4\,sin^4\,x - 2\,sin^2\,x + 2\,(cos^2x - sin^2\,x) - 3\,(2\,sin\,xcosx)^2 - \\ - 2\,cos^2\,x + 1 = 0$$

$$4sin^4x - 2sin^2x + 2\,cos^2x - 2\,sin^2x - 12\,sin^2x\,cos^2x - \\ - 2\,cos^2x + 1 = 0$$

Se va face să intre o singură linie trigonometrică, exprimând cosinusul x în funcție de sinus x prin prima formulă fundamentală :

$$4sin^4x - 2sin^2x + 2\,(1 - sin^2\,x) - 12\,sin^2x\,(1 - sin^2\,x) - \\ - 2\,(1 - sin^2x) + 1 = 0$$

$$16\,sin^4x - 16\,sin^2x + 1 = 0.$$

Ecuație bipatratică în privința necunoscutei $\sin x$

$$\sin^2 x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

$$\sin^2 x = \frac{8 \pm \sqrt{64-16}}{16} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{16} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{16} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$$

$$\sin x = \pm \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}}$$

Trebue să se vadă dacă expresiunile $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ și $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ nu se pot exprima ca sume de 2 radicali patratici din numere raționale.

$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ x, y, numere raționale.

Se ridică la patrat:

$$2 + \sqrt{3} = x + y + 2\sqrt{xy}$$

Cei doi membri fiind numere raționale, este necesar ca părțile raționale să fie identice și cele irațională identice între ele, de unde:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2\sqrt{xy} = \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x+y=2 \\ 4xy=3 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x+y=2 \\ xy = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Se formează ecuația de gr. II, care admite pe x, y ca rădăcini

$$z^2 - 2z + \frac{3}{4} = 0 \quad \text{sau} \quad 4z^2 - 8z + 3 = 0$$

$$z = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{4} = \frac{4 \pm 2}{4}$$

$$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

x și y fiind raționali, s'au putut face ipotezele de mai sus.

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

De asemenia : $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$

$2-\sqrt{3} = x+y-2\sqrt{xy}$ conduce la sistemul $\begin{cases} x+y=2 \\ 4xy=3 \end{cases}$ acelaş sistem de mai sus, deci :

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$ şi deci :

I) $$\sin x = \pm\left(\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}\right)$$

Trebue să se compare una din valorile $\sin x$ cu $\sin 15^0$.

Se calculează $\sin 15^0$ considerându-se 15^0 ca diferenţa dintre 45^0 şi 30^0, aplicându-se teorema de adiţie a sinusurilor : $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

$\sin 15^0 = \sin(45^0-30^0) = \sin 45^0 \cos 30^0 - \cos 45^0 \sin 30^0$

dar : $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$

$$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 15^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

De asemenea se găseşte :

$\sin 75^0 = \sin(45^0+30^0) = \sin 45 \cos 30 + \sin 30 \cos 45 =$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Soluţia generală I se desparte în ecuaţiile :

a) $\sin x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; b) $\sin x = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$;

c) $\sin x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$; d) $\sin x = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

Ecuația *a*) are soluția particulară $x=75^0$ și deci generală :

$$A) \begin{cases} x + 75^0 = (2k+1)\pi \\ x - 75^0 = 2k\pi \end{cases}$$

Ecuația *b*) are rădăcina particulară egală și de semn contrar ca ecuația precedentă : -75^0 ; soluția generală :

$$B) \begin{cases} x - 75 = (2k+1)\pi \\ x + 75 = 2k\pi \end{cases}$$

Ecuația *c*) are soluția particulară $x_0 = 15^0$, soluția e generală :

$$C) \begin{cases} x + 15^0 = (2k+1)\pi \\ x - 15^0 = 2k\pi \end{cases}$$

Ecuația *d*) are soluția parctiulară $x_0 = -15^0$, soluția generală :

$$D) \begin{cases} x - 15^0 = (2k+1)\pi \\ x + 15^0 = 2k\pi \end{cases}$$

Sau combinând soluțiile *A* cu *B* și *C* cu D

$$\left.\begin{array}{l} x = \pm 75^0 + k\pi \\ x = \pm 15^0 + k\pi \end{array}\right\} \quad k \text{ fiind un număr întreg.}$$

*

Probleme de rezolvat.

1. Să se găsiască punctele de intersecție ale curbei $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ cu axele de coordonate. Fie x_1, x_2, x_3 abscisele a 3 puncte de intersecție a curbei cu direcția pozitivă a axei de x, consecutive, cea mai mică fiind prima soluție mai mare ca 2π. Să se calculeze muchia cubului echivalent cu paralelipipedul dreptunghiu,

ce are cele trei dimensiuni în metri egale cu x_1, x_2, x_3. (Se va considera π cu cinci zecimale : $\pi = 3{,}14159$).

2. Să se găsiască punctele de intersecție ale curbei $y = tg(x - \frac{\pi}{4})$ cu axele de coordonate. Fie x_1, x_2, x_3 abscisele a 3 puncte de intersecție a curbei cu direcția pozitivă a axei Ox, consecutive, cea mai mică fiind prima valoare mai mare ca 4π. Să se calculeze muchia cubului echivalent cu paralelipipedul dreptunghiu, ce are cele 3 dimensiuni egale cu x_1, x_2, x_3. (Se va considera π cu cinci zecimale : $\pi = 3{,}14159$).

3. Să se găsiască valorile lui x pentru care funcțiunea $y = cos\,(x + \frac{\pi}{4})$ este maximă. Fie x_1, x_2, x_3 primele trei valori consecutive mai mari ca circumferința. Să se găsiască raza sferii, echivalentă cu paralelipipedul dreptunghiu, ce are dimensiunile în metri egale cu aceste 3 numere. (Se va considera $\pi = 3{,}14159$).

4. Să se găsiască valorile lui x pentru care funcțiunea $y = sec\,(x - \frac{\pi}{4})$ este minimă. Fie x_1, x_2, x_3 primele valori pozitive consecutive mai mari decât circumferința. Să se găsiască raza sferii echivalentă cu paralelipipedul dreptunghiu, ce are dimensiunile în m egale cu aceste 3 numere.

(Se va considera $\pi = 3{,}14\,159$).

5. Să se rezolve ecuația :

a) $3\,sec^4 x - 10\,sec^2 x + 8 = 0$

$(R : x_0 = \pm 45^0 \quad x, = \pm 30^0)$

b) $\frac{4cos^2 x}{sec^2 x} - \frac{3}{1 + tg^2 x} + 2 + sin^2 x + 12cos^4 x - 12cos^2 x = 0$

$(R : x_0 = 60^0 \quad x_0' = 30^0)$

c) $\sin^2 x - \dfrac{tg^2 x}{2\sec^2 x} - \dfrac{1}{4\operatorname{cosec}^2 x} - \sin^2 x \cos^2 x -$

$- \dfrac{1}{2(1 + cotg^2 x)} + \dfrac{3}{8} = 0$

$(R:\ 60^0;\ 240^0;\ 45^0,\ 315^0)$

calc →

d) $\dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{2} - \dfrac{3\, tg^2 x}{4(1 + tg^2 x)} + \dfrac{\sin^2 x}{8} + \dfrac{1}{8\sec^2 x} -$

$- \dfrac{1}{4} = 0$

$(R:\ 45^0;\ 60^0;\ 240^0;\ 225^0)$

e) $\dfrac{11\sin^2 x}{8} - \dfrac{3\, tg^2 \pi}{4(1 + tg^2 x)} + \dfrac{3\cos^2 x}{8} - \dfrac{\sin^2 x}{\sec^2 x} -$

$- \dfrac{1}{2\operatorname{cosec}^2 x} = 0$

$(R:\ 45^0;\ 60^0;\ 225^0;\ 240^0)$

f) $\dfrac{\sin^2 x}{4} - \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} - \dfrac{tg^2 x}{\sec^2 x} + \dfrac{1}{2(1 + cotg^2 x)} +$

$+ \dfrac{3}{8} = 0$

$(R:\ 45^0;\ 60^0;\ 225^0;\ 240^0)$

g) $\sqrt{3}\sin^2 x + 4\, tg\, x \sin^2 x \sec^2 x + \dfrac{\sqrt{3}}{cotg^2 x} - 4\, tg^2 x +$

$+ \sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3}\, tg^2 x \sec^2 x = 0$

$(R:\ 45^0;\ 135^0)$

h) $3\sin^2 x - 2\sin x - \dfrac{\cos x}{cotg\, x} + \cos^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{cosec} x} +$

$+ tg\, x \cos x - 1$ $(R:\ 30^0)$

i) $\sin^2 x + tg^2 x \cos^2 x - \dfrac{1}{\operatorname{cosec} x} = 3\sin x - 2\cos^2 x +$

$+ \dfrac{\cos x}{cotg\, x} - 2\sin^2 x$ $(R:\ 30^0)$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$f)\ tg\,x\,sec^2\,x - \frac{sin^2\,x}{colg\,x} - tg\,x\,cos^2\,x - \frac{1}{cos^2\,x} -$

$-3\,tg\,x + 4 = 0$

$(R:\ tgx = 1\ tgx = \pm 2)$

$k)\ sin^2\,x - \frac{2\,sin\,x}{cosec^2 x} - sin^2 x\,cos^2 x - \frac{sin\,x\,tg^2\,x}{2 + 2\,tg^2\,x} +$

$+ \frac{5\,sinx}{2} - 1 = 0$

(R: Ec. reciprocă: $2\,sin^4 x \quad 5\,sin^3 x + 5\,sin\,x - 2 = 0$ cu soluțiile: 60^0; 90^0; 270^0)

$l)\ cos^2\,x - \frac{4\,cosx}{sec^2\,x} - sin^2\,x\,cos^2 x - \frac{cos^3\,x}{2} + \frac{7}{1 + tg^2 x} -$

$- \frac{9\,cosx}{2} + 1 = 0$

(Răspuns: Ec. reciprocă: $2\,cos^4 x - 9\,cos^3 x + 14\,cos^2 x -$ $- 9\,cos\,x + 2 = 0$ cu soluțiile: $x = 60^0$; $x = 60^0$)

6. Să se rezolve triunghiul dreptunghiu determinat prin:

$$a = 2485{,}37\,m \quad b = 1378{,}29\,m$$

7. Intr'un triunghiu dreptunghiu catetele sunt proporționale cu numerele 3, 4; iar ipotenuza este de 1825m. Să se rezolve triunghiul.

(Răspuns: $b = 657m$; $c = 1168m$).

8. Perimetrul unui triunghiu dreptunghiu este de 288m; iar aria de 3456m². Să se rezolve triunghiul.

(Răspuns: $a = 120m$; $b = 96m$; $c = 72m$).

9. Intr'un triunghiu dreptunghiu, ipotenuza este de 2785m, iar perimetrul de 6674m. Să se rezolve triunghiul.

(Răspuns: $b = 1633m$, $c = 2256m$).

10. Să se rezolve triunghiul dreptunghiu, care are aria de 346,85 m² și unghiul $B = 75^0\ 47'\ 38''$.

11. Să se rezolve triunghiul dreptunghiu care are aria de 2,9538 m² și unghiul $C = 56^0\ 37'\ 26''$.

12. Să se rezolve triunghiul dreptunghiu, care are perimetrul de 34,5738 m și unghiul $B = 35^0\ 37'\ 39''$.

13. Unul din unghiurile ascuțite ale unui triunghiu dreptunghiu satisface ecuației:

$$9\ sin^2x - 23\ sinx + 10 = 0$$

iar cateta alăturată acestui unghiu este de 2578,35 m. Să se rezolve triunghiu.

(*Răspuns*: $sin\ B = \frac{5}{9}$)

14. Unul dintre unghiurile ascuțite ale unui triunghiu dreptunghiu satisface ecuației:

$$12\ tg^2x - 25\ tgx + 12 = 0$$

iar ipotenuza este de 3158,27 m. Să se rezolve triunghiul.

(*Răspuns*: $tg\ B = \frac{3}{4}$; $tg\ B = \frac{4}{3}$)

15. Unul dintre unghiurile ascuțite ale unui triunghiu dreptunghiu satisface ecuației:

$$57\ sin^2x - 77\ sinx + 7\ cos^2x + 20 = 0$$

Să se găsiască acest unghiu. Să se rezolve triunghiul dacă cateta opusă unghiului găsit este de 200,752 m.

(*Răspuns*: $sinx = \frac{27}{50}$)

16. Unul dintre unghiurile ascuțite ale unui triunghiu dreptunghiu satisface ecuației:

$$2500\ tg^2x + sin^2x + 2400 = 4900\ tg\ x - cos^2x$$

Să se găsiască acest unghiu. Să se rezolve triunghiul știind că ipotenuza este de 278,349 m.

($Răspuns$: $tgx = \frac{49}{50}$)

17. Intr'un triunghiu dreptunghiu, unul dintre unghiurile ascuțite întrece cu $3^0\ 45'\ 27''$ unghiul ce satisface ecuației :

$$13\ sin^2x - 20\ sinx + 4\ cos^2x = 0$$

iar cateta opusă acelui unghiu este de 3872,25 m. Să se rezolve triunghiul.

($Răspuns$: $sinx = \frac{2}{9}$)

18. Un unghiu ascuțit al unui triunghiu dreptunghiu întrece cu $5^0\ 14'\ 54''$ unghiul ce satisface ecuației :

$$27\ tg^2x\ cotgx + 6 - 8\ cotgx = 0$$

iar ipotenuza este de 23,4827 m. Să se rezolve triunghiul.

($Răspuns$: $tgx = \frac{4}{9}$)

19. Unul dintre unghiurile ascuțite ale unui triungihu dreptunghiu este cu $3^0\ 23'\ 47''$ mai mic decât unghiul ce satisface ecuației :

$$\frac{45}{cos^2x} - 106\ tgx = 0$$

iar ipotenuza este de 342,735m. Să se rezolve triunghiul.

($Răspuns$: $tg\ x = \frac{5}{9}$; $tg\ x = \frac{9}{5}$)

20. Să se rezolve ecuația : 1^0 în general :

$a)$ $sin^2x - sin\alpha\ tgx\ cos^2x - cos\alpha \frac{tgx}{sec^2x} + sin\alpha\ cos\alpha\ cos^2x = 0.$

2^0 să se aplice la cazul $\alpha = 23^0\ 58'\ 47''$

($R.$: $tgx = sin\alpha$; $tgx = cos\alpha$).

b) $tg^2x\,sec^2x - tg^2x - \dfrac{3}{cotg^2x} - sec^2\alpha\,tg^2x + 3\,sec^2\alpha = 0$

2^0 în particular $\alpha = 27^0\,28'\,48''$

(*Răspuns* : $tgx = \pm sec\alpha$; $tgx = \pm\sqrt{3}$

c) $80\,cotg^2\alpha\,cotg^2x + 281\,cotg\alpha\,cotgx + 80 = 0$

în particular $\alpha = 137^0\,45'\,23''$

(*Răspuns* : $cotg\,x = -\dfrac{5}{16}\,tg\,\alpha$; $cotg\,x = -\dfrac{16}{5}\,tg\,\alpha$)

d) $100\,cotg^2\alpha\,cotg^2x + 641\,cotg\alpha\,cotgx + 100 = 0$

în particular pentru $\alpha = -28^0\,45'\,37''$.

(*Răspuns* : $cotgx = -\dfrac{4}{25}tg\alpha$; $cotg\,x = -\dfrac{25}{4}\,tg\alpha$)

21. Să se găsiască $sin\,\dfrac{x}{5}$ în funcție de $sinx$. Să se calculeze : 1^0 $sin\,36^0$ în legătură cu $sin\,180^0$; 2^0 Toate liniile trigonometrice ale arcului de 36^0.

22. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresiunea :

$$y = \frac{2\,sina + sin\,3a - sin\,5a}{2\,cosa - cos\,3a - cos\,5a}$$

și să se calculeze valoarea ei pentru :

$$a = 195^0\,45'\,38''.$$

(*Răspuns* : $y_1 = tga$).

23. Să se descompună în factori expresiunea :

a) $$E = \frac{cotg^3b - sin\,3a\,cotg^3b}{tga\,cosa - tga\,cosb + sin^2\dfrac{a+b}{2}\,tga + sin^2\dfrac{a-b}{2}\,tga}$$

și să se găsiască valoarea ei pentru $a = 38^0\,46'\,36''$

$b = 53^0\,37'\,48''$.

(*Răspuns* : $E = \dfrac{cotg^3\,b\ sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3a}{2}\right)}{2\,tga\ sin^2\,b\,cos^2a}$

b) $$E = \frac{ctg^5 a + \cos 3b\, ctg^5 a}{tgb \sin a - tgb \sin b + \sin^2 \frac{a-b}{2} tgb + \cos^2 \frac{a+b}{2} tgb}$$

și să se găsiască valoarea ei pentru $a = 172^0\ 4'\ 52''$ $b = -37^0\ 25'\ 46''$.

(*Răspuns*: $$E = \frac{ctg^5 a \cos^2 \frac{3b}{2}}{2tgb \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)}$$

24. Să se găsiască valoarea expresiunii:

$$E = \frac{5 \sin a ctg^2 b - 5 \sin a\ ctg^2\ a}{2\, tg^2 b \cos a - tg^2 b \cos 3a - \cos 5\, a tg^2 b}$$

pentru $a = 20^0\ 23'46''$ $b = 56^0\ 37'\ 46''$.

(*Răspuns*: $$E = \frac{5 \sin (a+b) \sin (a-b)}{2 \sin^2 2a \sin^2 b\, tg^2 b}$$

25. Să se rezolve ecuația, în general:

a) $$tg^2 x \sin^2 x - 2\, tg^2 x \cos^2 x - 2 \sin \alpha \sin \beta \sin^2 x + 2 \cos \alpha \cos \beta \sec^2 x \cos^2 x - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos^2 x + \cos^2 x (\sin \alpha + \sin \beta)^2 (\cos \alpha - \cos \beta)^2 = 0$$

în particular pentru $\alpha = 25^0\ 47'\ 32''$ $\beta = 49^0\ 57'\ 48''$.

[*Răspuns*: $tgx = \pm (\sin \alpha + \sin \beta)$: $tgx = \pm (\cos \alpha - \cos \beta)$].

b) $$3\, tg^2 x - 5 \sin \alpha\, tgx - 2tgx - 3 \sin \beta = tgx - 5 \sin \beta\, tg\, x - 2\, tg^2\, x - 3 \sin \alpha$$

în particular pentru $\alpha = 85^0\ 37'\ 27''$ $\beta = 43^0\ 22'\ 55''$.

(*Răspuns*: $tg\, x = \frac{3}{5}$; $tgx = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$)

c) $2\,tg^2x - 3\sin\alpha\, tgx + 2\sin\beta = 2\,tgx - tg^2x + 3\sin\beta\, tgx - 2\sin\alpha$

în particular pentru $\alpha = 78^0 24' \; 35''$ $\beta = -35^0 \; 15' \; 39''$

$$\left(\textit{Răspuns}: \; tg\,x = \frac{2}{3}; \; tgx = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

26. Cele două unghiuri ascuțite ale unui triunghiu dreptunghiu satisfac relației:

$$\cos B \cos C = \frac{2}{7}$$

Să se rezolve triunghiul, știind că $c = 194{,}758$ m.

$$\left(\textit{Răspuns}: \; B - C = \arccos\frac{4}{7}\right)$$

27. Unghiurile ascuțite ale unui triunghiu dreptunghiu satisfac relației:

$$\cos B \cos C = \frac{4}{9} - \sin B \sin C$$

să se rezolve triunghiul dacă $b = 2758{,}76$ m.

$$\left(\textit{Răspuns}: \; B - C = \arccos\frac{4}{9}\right)$$

28. Unghiurile ascuțite ale unui triunghiu dreptunghiu satisfac relației:

$$\sin B \cos C = \frac{7}{15} + \sin C \cos B.$$

Să se rezolve triunghiul dacă $a = 2457{,}35$ m.

$$\left(\textit{Răspuns}: \; B - C = \arcsin\frac{7}{15}\right)$$

29. Să se rezolve ecuația:

$$8\cos^4 x - 3\cos^2 x - 5\cos 2x - 2\sin^2 2x - 5\sin^2 x + 1 = 0$$

comparându-se o linie trigonometrică ce satisface ecuației cu liniile trigonometrice ale arcului de 75^0.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

30. Să se rezolve triunghiul în care se dă:

1°	$a=1278{,}24$m.	$B=34^\circ54'37''$	$C=73^\circ24'31''$
2°	$b=378{,}254$m	$A=134^\circ25'32''$	$C=23^\circ57'13''$
3°	$c=0{,}037245$m	$A=38^\circ25'27''$	$B=23^\circ57'13''$

31. Să se rezolve triunghiul în care se dă:

1°	$a=1527{,}84$m	$c=2466{,}59$m	$B=115^\circ27'58''$
2°	$a=98{,}328$m	$b=178{,}324$m	$C=105^\circ29'38''$
3°	$b=17{,}2487$m	$c=23{,}7637$m	$A=137^\circ49'56''$
4°	$b=2269{,}207$m	$c=2558{,}133$m	$A=71^\circ27'38''$
5°	$a=2895{,}799$m	$c=2602{,}451$m	$B=68^\circ35'46''$
6°	$b=193{,}35$m	$c=1378{,}53$m	$A=57^\circ39'46''$
7°	$c=174{,}75$m	$a=1453{,}32$m	$B=115^\circ47'36''$
8°	$b=872{,}943$m	$a=1478{,}38$m	$C=34^\circ45'28''$
9°	$a=630{,}74$m	$c=728{,}98$m	$B=53^\circ29'18''$
10°	$b=124578{,}25$m	$c=140273{,}75$m	$A=100^\circ53'48''$
11°	$a=109478{,}65$m	$c=127359{,}35$m	$B=104^\circ37'26''$
12°	$b=6785{,}6$m	$c=16538{,}2$m	$A=29^\circ34'13''$

32. Să se rezolve triunghiul în care se dă:

1.	$a=5000$m	$b=8001m$	$c=11007$m
2.	$a=3521{,}40$m	$b=2817{,}12$m	$c=2112{,}84$m.

33. Să se rezolve triunghiul în care s e dă:

1.	$a=3274{,}25$m	$b=2584{,}38$m	$A=48^\circ57'24''$.
2.	$b=2839{,}34$m	$c=3237{,}23$m	$B=35^\circ48'37''$
3.	$c=237{,}459$m	$a=149{,}278$m	$C=117^\circ45'238''$

34. Intr'un triunghiu oarecare $\cos A = \frac{3}{16}$. Să se găsească unghiul A. Să se rezolve triunghiul dacă $b = 646{,}65$m $c = 989$m.

35. Intr'un triunghiu oarecare $\cos B = \frac{4}{21}$. Să se găsească unghiul B. Să se rezolve triunghiul dacă $a = 572{,}45$ dm. $c = 876$ dm.

36. Unghiul B al unui triunghiu oarecare satisface ecuației: $\operatorname{colg} B = -\frac{9}{8}$. Să se găsească acest unghiu; să se rezolve triunghiul dacă b=1834,25m. a=2372,48m.

37. Să se rezolve triunghiul în care b=324m c=289m, iar unghiul A satisface ecuației:

$$\operatorname{tg}^2 A + \cos\alpha \operatorname{tg} A + \cos\alpha - 1 = 0$$

unde $\alpha = 56^0\ 25'\ 42''$.

(*Răspuns*: $\operatorname{tg} A = -1$ $\operatorname{tg} A = 1 - \cos\alpha$).

38. Să se rezolve triunghiul în care a=18m b=21,325 m, iar unghiul A satisface ecuației:

$\operatorname{tg}^2 A - (2 - \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha) \operatorname{tg} A + (1 - \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha \cos\alpha) = 0$

în care $\alpha = 65^0\ 23'\ 44''$.

(*Răspuns*: $\operatorname{tg} A = 1 + \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg} A = 1 - \cos\alpha$).

39. Aria unui triunghiu oarecare este de 90000m^2, laturile: a=812,45m b=298,75m. Să se găsească unghiul C; să se rezolve triunghiul.

40. Se consideră un cerc cu raza de 5cm; patratul și triunghiul echilateral înscrise, având un vârf comun. Să se calculeze segmentele determinate pe laturile celor două poligoane.

41. Se consideră un cerc cu raza de 434,78m, patratul și triunghiul echilateral înscrise în cerc, având un vârf comun. Să se calculeze lungimea segmentului ce unește picioarele apotemelor duse: 1° la laturi ce pleacă din vârful comun; 2° la laturi ce nu trec niciuna prin vârful comun; 3° la laturi astfel că una trece prin vârful comun, cealaltă nu trece prin vârful comun.

42. Se consideră un cerc cu raza de 1348,25m, exagonul regulat și patratul înscrise având un vârf comun. Să se calculeze segmentele determinate pe laturile celor două poligoane.

43. Se consideră un cerc cu raza de 1527,83m, exagonul regulat și patratul înscrise, având un vârf comun. Să se calculeze lungimea segmentului determinat de picioarele apotemelor duse relativ la laturi: 1° care trec amândouă prin vârful comun; 2° una trece, cealaltă nu trece prin vârful comun; 3° nu trece niciuna prin vârful comun; se presupune că această distanță este verticală. In cât timp ar parcurge-o o minge care pleacă cu iuțeala de 4m pe secundă. 1° către pământ; 2° în sens contrar.

44. Din două orașe M, N, situate corespunzător pe laturile OA, OB ale unui unghiu de 65°23′378″ la distanțe OM=45km, ON=30km, pleacă două trenuri în același timp. Trenul de pe OA se mișcă uniform accelerat, accelerația fiind 9,452 km. pe oră, plecând cu iuțeală inițială de 60 km pe oră; trenul din direcția OB se mișcă uniform cu iuțeala de 68,245km pe oră. Să se afle: 1° la ce distanțe de punctul O se găsesc după $2\frac{1}{2}$ ore; 2° ce distanță va fi între ele după acest timp; 3° la cât timp se vor întâlni dacă trenurile își continuă mișcarea lor pe direcția distanței ce le unește.

GEOMETRIE IN SPAȚIU.

Probleme rezolvate.

1. *Diagonala unui paralelipiped dreptunghiu este de 7 cm; aria totală de 72 cm²; i r perimetrul bazei este de 16 cm. Să se calculeze: 1⁰ Volumul paralelipipedului; 2⁰ Inclinarea diagonalei pe planul bazei; 3⁰ Să se generalizeze; 4⁰ Să se găsească relațiile dintre diagonală, arie totală și perimetru, dacă paralelipipedul se transformă în cub; 5⁰ In acest caz să se studieze variația ariei totale și a diagonalei ca funcțiuni de perimetru.*

1⁰ $Vol = L \times l \times I.$

Trei necunoscute, pentru determinarea cărora trebuesc 3 ecuații, care se găsesc căutând relații între datele problemei și necunoscute. Insemn diagonala paralelipipedului cu D, diagonala bazei cu d. Diagonala paralelipipedului, fiind diagonala dreptunghiului format de două muchii opuse și de diagonalele bazelor, ce le unesc, rezultă:

$$D^2 = d^2 + I^2$$

dar: $d^2 = L^2 + l^2$ deci:

$$D^2 = L^2 + l^2 + I^2$$

de unde prima ecuație:

I. $L^2 + l^2 + I^2 = 49.$

Aria totală $=2(Ll+lI+IL)$, de unde a doua, ecuație:

II. $Ll+lI+IL=36.$

III. $L+l=8.$

Pentru a rezolvi sistemul, întrebuințez un artificiu: Consider pe I ca cunoscut:

$$\begin{cases} L^2+l^2=49-I^2 \\ Ll+I(L+l)=36 \\ L+l=8. \end{cases}$$

Substitui în ecuația a două expresiunii $L+l$ valoarea ei, amplific ecuația a doua cu 2 și ridic ecuația treia la patrat:

$$\begin{cases} L^2+l^2=49-I^2 \\ 2Ll=72-16I \\ L^2+l^2+2Ll=64. \end{cases}$$

Scad din ec. III-a pe celelalte două și schimb membrii între ei:

$$-49+I^2-72+16I+64=0.$$

In acest chip, am eliminat două necunoscute deodată:

$$I^2+16I-57=0$$

$$I=-b'\pm\sqrt{b'^2-c}=-8\pm\sqrt{64+57}=-8\pm\sqrt{121}=$$

$$=-8\pm 11 \quad I=3.$$

Soluția negativă nu satisface problemei geometrice. Rezolv sistemul:

$$\begin{cases} L+l=8 \\ Ll=12 \end{cases}$$

Identific pe L, l cu rădăcinile unei ecuații de gr. II în x, pe care o formez.

$$x^2-8x+12=0$$

$$x=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm 2$$

$$L=6 \quad l=2.$$

2º Inclinarea diagonalei pe planul bazei este dată de unghiul dintre diagonală și planul bazei $ABCD$, adică unghiul dintre diagonală și proecția ei pe plan care e diagonala bazei.

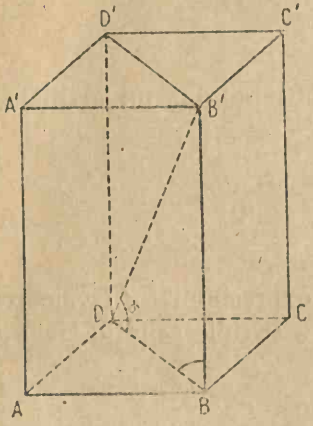

Fig. 17.

Unghiul α se va găsi rezolvind triunghiul DBB'. Acest triunghiu este determinat prin ipotenuză, care e diagonala paralelipipedului și prin cateta BB', care e înălțimea paralelipipedului.

Aplic teorema : Într'un triunghiu dreptunghiu, o catetă este egală cu produsul dintre ipotenuză și sinusul unghiului opus. Pentru cateta BB',

$$BB' = DB' \sin\alpha \quad \text{deci :}$$

$$\sin\alpha = \frac{BB'}{DB'} = \frac{3}{7}$$

Aplic logaritmii :

$$\log\sin\alpha = \log 3 - \log 7 = 0{,}47712 - 0{,}84510 = 0{,}47712 + \overline{1}{,}15490$$

$$\log\sin\alpha = \overline{1};63202$$

$$\alpha = 25^\circ 22' 35''$$

$\overline{1}{,}63186$	. . . . .	$25^\circ 22'$
$D = 27$		
$d = 16$	$13{,}5$ . . .	$30''$
	$2{,}25$ . .	$5''$
$\overline{1}{,}6320175$	. . . . .	$25^\circ 22' 35''$

3^0 Insemn diagonala paralelipipedului cu d; aria totală, $2s$; perimetrul bazei, $2p$. Sistemul de rezolvat este:

$$\begin{cases} L^2 + l^2 + I^2 = d^2 \\ Ll + LI + lI = s \\ L + l = p \end{cases}$$

Procedând ca în cazul particular,

$$\begin{cases} L^2 + l^2 = d^2 - I^2 \\ Ll + I(L + l) = s \\ L + l = p \end{cases}$$

$$-2 \begin{cases} L^2 + l^0 = d^2 - I^2 \\ Ll = s - pI \\ L^2 + 2Ll + l^2 = p^2 \end{cases}$$

$$I^2 + 2pI + p^2 - d^2 - 2s = 0$$

$$I = -p \pm \sqrt{p^2 - p^2 + d^2 + 2s} = -p \pm \sqrt{d^2 + 2s}$$

p fiind esențial pozitiv, problema e posibilă numai pentru semnul pozitiv înaintea radicalului și numai dacă $\sqrt{d^2 + 2s} > p$ sau

$$d^2 - p^2 > -2s \quad \text{sau}$$

$$a) \qquad p^2 - d^2 < 2s$$

Dacă condiția $a)$ este îndeplinită, sistemul pentru L, l, este:

$$L + l = p$$

$$Ll = s - p(-p + \sqrt{d^2 + 2s} = s + p^2 - p\sqrt{d^2 + 2s}$$

Ecuația la care satisfac L, l este:

$$x^2 - px + (s + p^2 - p\sqrt{d^2 + 2s}) = 0$$

$$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4s - 4p^2 + 4p\sqrt{d^2 + 2s}}}{2} =$$

$$= \frac{p \pm \sqrt{4p\sqrt{d^2 + 2s} - 4s - 3p^2}}{2}$$

Pentru ca problema să fie posibilă, trebue: 1° Rădăcinile să fie reale; 2° Rădăcinile să fie pozitive; deci:

$$b)\ 4p\sqrt{d^2+2s}-4s-3p^2>0$$

$$c)\ s+p^2-p\sqrt{d^2+2s}>0$$

adică produsul rădăcinilor în ec. de gr. II să fie pozitiv, suma fiind pozitivă.

4° Pentru ca paralelipipedul să se transforme în cub, trebue:

$$I=L=l$$

şi deci sistemul I) ia forma:

$$\begin{cases} 3I^2=d^2 \\ 3I^2=s \\ 2I=p \end{cases}$$

Eliminând pe I între primele două relaţii rezultă:

$$s=d^2$$

Intre ultimile două:

$$s=\frac{3p^2}{4}$$

sau eliminând pe s între aceste două rezultă:

$$d^2=\frac{3p^2}{4}$$

şi deci relaţiile căutate sunt:

$$s=\frac{3}{4}p^2$$

$$d=\frac{\sqrt{3}}{2}p$$

Pentru a studia variaţia însemn $2p=x$, $2s=y$ şi $d=y$. Deci rămâne de construit curbele:

$$y=\frac{3}{8}x^2$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{4}x$$

prima este o parabolă, cu vârful în origină, situată deasupra axei de x; a doua, o dreaptă ce trece prin origina coordonatelor.

Abscisa fiind perimetrul, ordonatele la dreaptă și la parabolă, reprezintă corespunzător diagonala și aria totală a cubului.

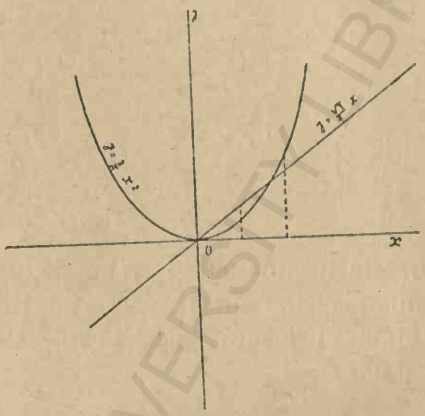

Fig. 18

*

2. *O piramidă exagonală regulată înaltă de 3 cm. are aria totală de* $18\sqrt{3}$ *cm*^{0}. *Să se calculeze : 1*^{0} *Volumul piramidei ; 2*^{0} *Unghiul dintre apotema piramidei și muchia piramidei ; 3*^{0} *Muchia tetraedrului regulat echivalent cu piramida.*

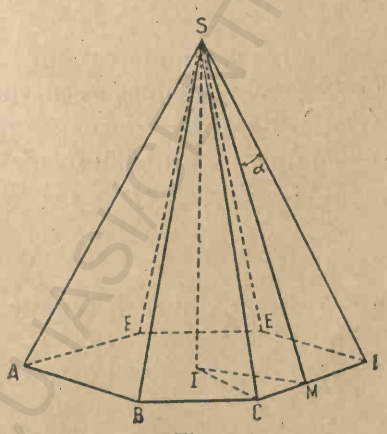

Fig. 19

$$Vol = \frac{\text{aria } B \times I}{3}$$

Caut să exprim volumul în funcție de elementele ce determină piramida : latura bazei și înălțimea.

$$\text{aria } B = \frac{P.a}{2} = \frac{6La}{2} =$$

$$= 3La \text{ (}L\text{, latura, } a \text{ apotema bazei)}$$

$$a^2 = L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4}$$

$$a = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{aria } B = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} \qquad Vol = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} \times \frac{I}{3} = \frac{L^2 . I . \sqrt{3}}{2}$$

$$I = 3 \text{ cm}$$

L este necunoscută; trebueşte o ecuaţie pentru determinarea ei. Caut relaţiunea între data problemei, aria totală şi latura bazei, care este formula ce dă aria totală.

$$\text{Aria tot.} = \text{Aria lat.} + \text{aria } B = \frac{6LA}{2} + \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} =$$

$$+ 3LA + \frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$$ unde A este apotema piramidei, înălţimea unei feţe laterale, SM. Deci ecuaţia :

$$3LA + \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$$

ecuaţie ce nu e suficientă pentru detrminarea lui L, fiindcă conţine şi necunoscuta A ; trebueşte încă o ecuaţie

Se obţine exprimând relaţia dată de *teorema lui Pythagora* între laturile triunghiului dreptunghiu format de apotema piramidei şi înălţime : $\overline{SM}^2 = \overline{SI}^2 + \overline{IM}^2$

$$A^2 = I^2 + a^2$$

S'a introdus necunoscuta a; trebue încă o ecuaţie, anume :

$$a = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Se elimină a între aceste două ecuații din urmă, prin substituție :

$$\begin{cases} A^2 = 9 + \dfrac{3L^2}{4} \\ 3LA + \dfrac{3L^2\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \end{cases}$$

Se elimină numitorii și se simplifică ecuația a II-a prin 3 :

$$\begin{cases} 4A^2 = 36 + 3L^2 \\ 2LA + L^2\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \end{cases}$$

Sistem de gr. II, particular, ecuația II-a fiind de gradul I în privința lui A ; se rezolvă prin *substituție*.

$$A = \frac{\sqrt{3}(12 - L^2)}{2L}$$

$$4 \times \frac{3(12 - L^2)^2}{4L^2} = 36 + 3L^2$$

Se simplifică prin 3, se elimină numitorul, se ridică binomul la patrat

$$144 - 24L^2 + L^4 = 12L^2 + L^4$$

Ecuația, care se prezintă sub formă de ecuație bipatratică, se reduce la o ecuație de gr. II, tip redus.

$$36L^2 = 144$$

$$L^2 = \overset{9}{\frac{144}{36}} = \frac{16}{4} = 4$$

$L = 2$cm. (soluția—2 imposibilă în problema geometrică.)

$$\text{Vol.} = \frac{L^2 I\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} = 6 \times 1{,}73 = 10{,}380\text{cm}^2.$$

2^0 Unghiul α se va afla rezolvind triunghiul CSM, dreptunghiu în M, se cunoaşte cateta $CM = \frac{L}{2} = 1$cm. SM se determină, rezolvind complect sistemul precedent:

$$\overline{SM} = A = \frac{\sqrt{3}(12-4)}{4} = \frac{8\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$$

Se aplică triunghiului teorema: o catetă este egală cu produsul celeilalte catete prin tangenta unghiului opus catetei de calculat.

$$\overline{CM} = \overline{SM}\ tg\ \alpha$$

$$tg\,\alpha = \frac{\overline{CM}}{\overline{SM}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Se aplică logaritmii:

$$log\ tg\,\alpha = -log\ 2 - \frac{log\ 3}{2} = -0{,}30103 - \frac{0{,}47712}{2} =$$

$$= -0{,}30103 - 0{,}23856$$

$$log\ tg\,\alpha = \bar{1}{,}69897 + \bar{1}{,}76144 = \bar{1}{,}46041$$

Fiind < 0, unghiul este $<$ de 45^0.

$$\alpha = 16^0\,6'\,7''$$

	$\bar{1}{,}46035$	$16^0\,6'$
$D = 47$	$5{,}48$	$7''$
$d = 6$	$0{,}47$	$0{,}6$
	$\bar{1}{,}4604095$	$16^0 6' 7'',6$

3^0 Insemn cu L muchia tetraedrului regulat. Se cunoaşte volumul. Exprim volumul în funcţie de muche.

$$\text{Vol.} = \frac{\text{aria } B \times I}{3}\ (I, \text{ înălţimea tetraedului})$$

aria $B = \frac{Li}{2}$ (i, înălțimea bazei)

$$i^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4}$$

$$i = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

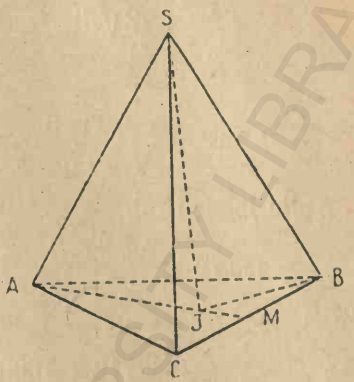

Fig. 20.

$$\text{aria } B = \frac{L \times \frac{L\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Exprim înălțimea I în funcție de muchia L.

$I^2 = L^2 - R^2$ (R, raza cercului circumscris triunghiului).

Trebue eliminat R, pentru care trebue o relație între R și L anume:

$$L = R\sqrt{3}$$

$$I^2 = L^2 - \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2 = L^2 - \frac{L^2}{3} = \frac{2L^2}{3}$$

$$I = \frac{L\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Vol.} = \frac{\frac{L^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{L\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{3} = \frac{L^3\sqrt{2}}{12} \text{ deci:}$$

$$\frac{L^3\sqrt{2}}{12} = 6\sqrt{3}$$

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

$$L^3 = \frac{72\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$L = \sqrt[3]{\frac{72\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$$

Aplic logaritmii.

$$\log L = \frac{\log 72 + \frac{\log 3}{2} - \frac{\log 2}{2}}{3} =$$

$$= \frac{1{,}85733 + \frac{0{,}47712 - 0{,}30103}{2}}{3} =$$

$$= \frac{1{,}85733 + 0{,}23856 - 0{,}15051}{3}$$

$$\log L = \frac{2{,}09589 + \overline{1}{,}84949}{3} = \frac{1{,}94538}{3} = 0{,}64846$$

$$L = 4{,}451 \text{ cm.}$$

3. *Un con are volumul de* $12\pi dm^3$.; *suprafaţa sa laterală desfăşurată pe un plan dă un sector al cărui unghiu la centru este de* 216^0. *Să se calculeze*: 1^0 *aria laterală a conului*; 2^0 *Unghiul dintre generatoare şi înălţime.*

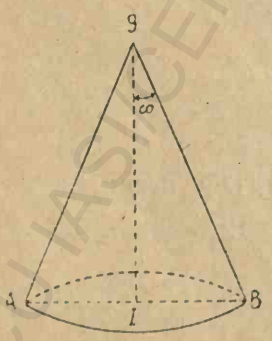

Fig. 21.

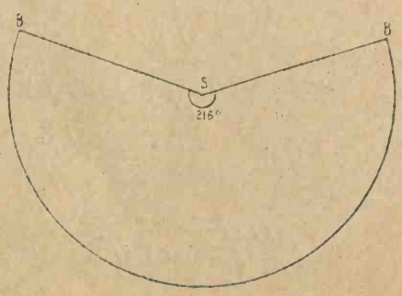

Fig. 22.

Aria lat $= \pi RG$

R, G sunt necunoscute, trebuesc 2 ecuații pentru determinarea lor.

O ecuație este relația dintre necunoscute și volum, acesta fiind cunoscut.

$$\text{Vol} = \frac{\pi R^2 I}{3}$$

$$\text{I)} \quad \frac{R^2 I}{3} = 12$$

S'a introdus necunoscuta I, așa că vor trebui 3 ecuații. Trebue de găsit relația între necunoscute și unghiul la centru al sectorului desfășurat. In desfășurare, raza sectorului este generatoarea conului, lungimea arcului sectorului este lungimea cercului de bază al conului. Ecuația căutată este dată de formula lungimei arcului în funcție de rază și de unghiul sectorului, anume:

$$\text{lung. arc.} = \frac{\pi r n}{180} \text{ care dă ecuația:}$$

$$\text{II)} \quad 2R = \frac{G \times 216}{180}$$

Ecuația a III-a este relația dată de *teorema lui Pythagora* în triunghiul format de rază, generatoare, înălțime:

$$\text{III)} \quad G^2 = I^2 + R^2$$

Trebue de rezolvit sistemul:

$$\begin{cases} R^2 I = 36 \\ R = \dfrac{\overset{9}{\cancel{108}}\, G}{\cancel{180}} = \dfrac{12G}{20} = \dfrac{3G}{5} \\ G^2 = I^2 + R^2 \end{cases}$$

Se elimină R întâi din primele două ecuații, apoi din ultimele două, prin *substituție*, ecuația a II-a dând valoarea lui R:

$$\begin{cases} \dfrac{9G^2.I}{25} = 36 \\ G^2 - \dfrac{9G^2}{25} = I^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} G^2.I = 100 \\ 16G^2 = 25I^2 \end{cases}$$

Aplicând iarăși *metoda substituției*, se trage valoarea necunoscutei I din ecuația a II-a

$$I^2 = \frac{16G^2}{25}$$

$$I = \frac{4G}{5}$$

$$\frac{4G^3}{5} = 100$$

$$G^3 = \frac{500}{4} = 125 = 5^3$$

$$G = 5 \text{ dm}$$

$$I = \frac{4G}{5} = 4 \text{ dm}$$

$$R = \frac{3G}{5} = 3 \text{ dm}$$

$$\text{Aria lat.} = 15\pi$$

2. Unghiul α se găsește din triunghiul SIB, determinat, cunoscându-i-se toate laturile. Determin pe ω prin tangenta lui.

$$R = I\,tg\omega$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$tg\,\omega = \frac{R}{I} = \frac{3}{4}$$

$$log\ tg\omega = log\,3 - log\,4 = 0{,}47712 - 0{,}60206 = 0{,}47712 + \overline{1}{,}39794 = \overline{1}{,}77506$$

$$\omega < 45^0$$

$$\omega = 30^0\,47'\,2''$$

$$\begin{array}{l} D = 28 \\ d = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \overline{1}{,}77505 \ldots\ldots\ 30^0 47' \\ 0{,}93 \ldots\ldots\ 2'' \\ \overline{1}{,}77506 \ldots\ldots\ 30^0 47' 2'' \end{array}$$

4. Volumul unui trunchiu de con este de 9880 cm²; suma razelor de 31 cm şi înălţimea de 40cm. Să se calculeze:

1⁰ Aria totală: 2⁰ Inclinarea generatoarei pe bază.

Aria totală $= \pi G(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$

G, R, r sunt necunoscute.

Trebuesc 3 ecuaţii pentru a le determina. Se caută relaţii între datele problemei şi necunoscute.

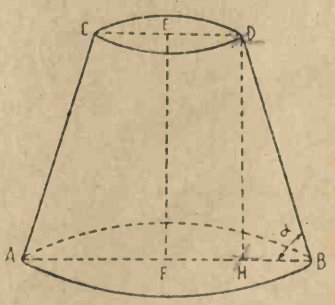

Fig. 23.

Vol $= \frac{\pi I}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$ de unde rezultă ecuaţia:

$$\text{I)} \quad \frac{40\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = 9880\,\pi$$

$$\text{II)} \quad R + r = 31$$

Apoi se aplică teorema lui *Pythagora*, triunghiului

format de generatoare și înălțime, observând că a treia latură este diferența razelor.

$$\text{III)} \quad G^2 - (R - r)^2 = 40^2$$

Primele două ecuații conținând 2 necunoscute, formează un sistem determinat.

$$\begin{cases} R^2 + r^2 + Rr = 247 \times 3 \\ R + r = 31 \end{cases}$$

Sistem de gr. II care se reduce la o formă simplă, calculând produsul necunoscutelor din ecuația rezultată scăzând din ecuația a II-a ridicată la patrat, ecuația I

$$\begin{cases} R^2 + r^2 + Rr = 741 \\ R^2 + r^2 + 2Rr = 961 \\ Rr = 220 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} 31 \\ 31 \\ \hline 31 \\ 93 \\ \hline 961 \end{array}$$

$$\begin{cases} R + r = 31 \\ Rr = 220 \end{cases}$$

Se formează ecuația de gr. II care admite pe R și r ca rădăcini:

$$x^2 - 31x + 220 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{31 \pm \sqrt{961 - 880}}{2} = \frac{31 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{31 \pm 9}{2}$$

$R = 20$ cm

$r = 11$ cm

$G^2 = 1600 + 81 = 1681$

$G = \sqrt{1681} = 41$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{16.81} & 41 \\ 81 & 81 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \times \\ 31 \\ \hline 41 \\ 123 \\ \hline 1271 \end{array}$$

Aria tot. $= \pi(41 \times 31 + 400 + 121) = (1271 + 521)\pi = 1792\pi$

2. Unghiul dintre generatoare și planul bazei mari este unghiul dintre generatoare și proiecția ei pe planul bazei, care e în direcția razei:

$$tg\alpha = \frac{DH}{HB} = \frac{40}{9}$$

$\log tg.\,\alpha = \log 40 - \log 9 = 1{,}60206 - 0{,}95424 = 1{,}60204 + \overline{1}{,}04576 = 0{,}64782$

$\alpha > 45^0 \qquad \alpha = 77^0\ 19'\ 11''$

	$0{,}64771 \ldots\ldots$	$77^0\ 19'$
$B = 59$	$9{,}80 \ldots\ldots$	$10''$
$d = 11$	$0{,}98 \ldots\ldots$	$1''$
	$0{,}64782 \ldots\ldots$	$77^0\ 19'\ 11''$

*

5. *Printr'un punct A al unui cerc de rază R trec două coarde AB, egală cu latura patratului înscris în cerc, AC, egală cu latura exagonului regulat înscris în cerc. Să se calculeze aria și volumul corpului generat prin rotația triunghiului ABC în jurul: 1° diametrului punctului A; 2° diametrului punctului B.*

1° Arie ABC = arie AB + arie CB + arie AC

AB și AC, prin rotație în jurul diametrului AA' dau naștere la conuri, CB, la un trunchiu de con. Ariile acestor corpuri se calculează după formulele ariilor laterale:

Aria con $= \pi RG$

Aria tr. con. $= \pi G(R + r)$

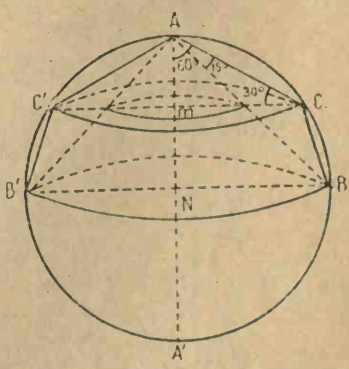

Fig. 24.

arie $AB = \pi . \overline{AB} . \overline{NB} = \pi R . R\sqrt{2} = \pi R^2 \sqrt{2}$

arie $AC = \pi . \overline{AC} . \overline{MC} = \pi R . \overline{MC}$

MC este catetă în triunghiul dreptunghiu AMC determinat prin $AC = R \quad \hat{A} = 60^0$

$\overline{MC} = \overline{AC} \sin 60^0 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ segment egal cu apotema exagonului regulat cum se vede uşor.

arie $AC = \frac{\pi R^2 \sqrt{3}}{2}$

arie $CB = \pi \overline{CB} (\overline{MC} + \overline{NB}) = \pi \overline{CB} \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} + R \right) =$

$\pi R . \overline{CB} \times \frac{\sqrt{3} + 2}{2}$

CB se calculează din triunghiul ACB determinat prin : $AC = R \quad AB = R\sqrt{2} \quad A = 60^0 - 45^0 = 15^0$, în care se găsesc uşor şi celelalte unghiuri măs $\hat{B} = \frac{arc\, AC}{2} = 30^0$.

Se exprimă că laturile sunt proporţionale cu sinusurile unghiurilor opuse :

$$\frac{CB}{\sin 15^0} = \frac{R}{\sin 30^0}$$

$$CB = \frac{R \sin 15^0}{\frac{1}{2}} = 2R \sin 15^0 = 2R \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = R \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

arie $CB = \pi R^2 \times \frac{(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} =$

$$= \pi R^2 \times \frac{\sqrt{18} + 2\sqrt{6} - \sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{4} = \pi R^2 \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

arie $CB = \pi R^2 \sin 75^0$

$$\text{arie } ABC = \pi R^2\sqrt{2} + \pi R^2\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi R^2\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{\pi R^2}{4}(4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{2})$$

$$\text{arie } ABC = \frac{\pi R^2}{4}(5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}) \text{ sau încă :}$$

$$\text{arie } ABC = 2\pi R^2 \sin 45^0 + \pi R^2 \sin 60^0 + \pi R^2 \sin 75^0.$$

$$\text{vol. } ABC = \text{vol. } AC + \text{vol. } CB - \text{vol. } AB.$$

$$\text{vol. } AC = \frac{\pi . \overline{MC}^2 . AM}{3}$$

$$AM = R \sin 30^0 = \frac{R}{2}$$

$$\text{vol. } AC = \frac{\pi \dfrac{3R^2}{4} \times \dfrac{R}{2}}{3} = \frac{\pi R^3}{8}$$

$$\text{vol. } CB = \frac{\pi . \overline{MN}}{3}(\overline{MC}^2 + \overline{NB}^2 + \overline{MC}.\overline{NB})$$

$$MN = AN - AM = \frac{R}{2}$$

$$\text{vol. } CB = \frac{\pi R}{6}\left(\frac{3R^2}{4} + R^2 + \frac{R^2\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi R^2}{24}(7 + 2\sqrt{3})$$

$$\text{vol. } AB = \frac{\pi \overline{NB}^2 . AN}{3} = \frac{\pi R^3}{3}$$

$$\text{vol. } ABC = \frac{\pi R^3}{8} + \frac{\pi R^3}{24}(7 + 2\sqrt{3}) - \frac{\pi R^3}{3} =$$

$$= \frac{\pi R^3}{24}(2 + 2\sqrt{3}) = \frac{\pi R^3}{12}(1 + \sqrt{3})$$

2^0 Arie ACB = arie AC + arie CB + arie AB.

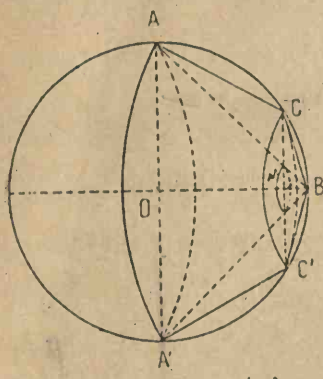

Fig. 25.

Arie $AC = \pi \overline{AC}(CM + AO) =$

$$= \pi R\left(\frac{R}{2} + R\right) = \frac{3\pi R^2}{2}$$

Arie $CB = \pi \overline{CB}.CM =$

$$= \frac{\pi R^2}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

Arie $AB = \pi.\overline{AO}.\overline{AB} = \pi R^2\sqrt{2}$

Arie $ACB = \dfrac{\pi R^2}{4}(6 + \sqrt{6} + 3\sqrt{2})$

$$\text{Vol } ACB = \text{vol } AC + \text{vol } CB - \text{vol } AB.$$

$$\text{vol. } AC = \frac{\pi.\overline{OM}}{3}\left(\overline{AO}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{AO}.\overline{CM}\right) =$$

$$= \frac{\pi R\sqrt{3}}{6}\left(R^2 + \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{2}\right) = \frac{7\pi R^3\sqrt{3}}{24}$$

$$\text{vol. } CB = \frac{\pi \overline{CM}^2.\overline{BM}}{3}$$

$$\overline{BM} = R - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{2}(2 - \sqrt{3})$$

$$\text{vol. } CB = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^2}{4}\cdot\frac{R}{2}(2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi R^3}{24}(2 - \sqrt{3})$$

$$\text{vol. } AB = \frac{\pi.\overline{AO}^2.OB}{3} = \frac{\pi R^3}{3}$$

$$\text{vol. } ACB = \frac{7\pi R^3\sqrt{3}}{24} + \frac{\pi R^3(2 - \sqrt{3})}{24} - \frac{\pi R^3}{3} =$$

$$= \frac{\pi R^3}{24}(6\sqrt{3} - 6) = \frac{\pi R^3}{4}(\sqrt{3} - 1)$$

Probleme de rezolvat.

1. Într'un paralelipiped dreptunghiu, perimetrul bazei este de 42dm; aria bazei, de 108dm²; diagonala paralelipipedului, de 39dm. Să se găsiască: *1°* volumul paralelipipedului; *2°* raza sferii echivalente cu paralelipipedul.

(*Răspuns*: *Cele trei dimensiuni sunt*: *9, 12, 36dm*)

2. Diagonala unui paralelipiped dreptunghiu este de 19dm, aria bazei de 60dm²; aria totală de 600 dm². Să se găsiască: *1°* volumul; *2°* unghiurile diagonalei cu fiecare din cele 3 direcții de muchie.

(*Răspuns*: *Cele trei dimensiuni sunt*: *6, 10, 15dm*)

3. Diagonala unui paralelipiped dreptunghiu este de 85 dm., diagonala bazei de 13dm, aria laterală de 2856dm². Să se găsiască: *1°* volumul; *2°* unghiurile diagonalei paralelipipedului cu diagonalele tuturor fețelor.

(*Răspuns*: *Cele trei dimensiuni sunt*: *5, 12, 84dm*)

4. Diagonala unui paralelipiped dreptunghiu este de 9m, suma muchiilor de 13m și aria laterală de 80m². Să se afle: *1°* volumul; *2°* unghiurile dintre diagonalele paralelipipedului.

(*Răspuns*: *Cele trei dimensiuni sunt*: *1, 4, 8m*)

5. Să se afle volumul unui paralelipiped dreptunghiu dacă aria bazei este de 108dm², suma celor trei dimensiuni de 29dm, iar diagonala egală cu generatoarea unui con a cărui arie totală este de 200πdm² și generatoarea întrece fracția $\frac{3}{4}$ din rază cu 11 dm.

(*R*: $R = 8$, $G = 17dm$; *cele trei dimensiuni*: *8, 9, 12dm*)

6. Să se afle volumul unui paralelipiped dreptunghiu dacă aria bazei este de 12dm², suma tuturor muchiilor

de 76 dm; iar diagonala este egală cu generatoarea unui con a cărui arie totală este de $90\pi dm^2$ și generatoarea întrece fracția $\frac{3}{5}$ din rază cu 10 dm.

(*R*: $R = 5$; $G = 13$; *cele trei dimensiuni*; *3, 4, 12dm*)

7. Aria totală a unei prisme exagonale regulate este de $33\sqrt{3}\,dm^2$; iar o diagonală a prismei care unește două vârfuri de pe cele 2 baze, situate în fețe laterale consecutive este de 5dm. Să se calculeze volumul prismei.

(*Răspuns*: $l_6 = \sqrt{3}\,dm \quad I = 4dm$).

8. Aria totală a unei prisme triunghiulare regulate este de $60\sqrt{3}\,dm^2$; iar distanța între un vârf al unei baze și centrul celeilalte baze este de 5dm. Să se calculeze volumul prismei.

(*Răspuns*: $l_3 = 4\sqrt{3}\,dm \quad I = 3\,dm$).

9. Să se găsiască volumul unui tetraedru regulat în funcție de: *1*⁰ muchie; *2*⁰ înălțimea tetraedrului; *3*⁰ apotema tetraedrului; *4*⁰ apotema bazii; *5*⁰ raza cercului circumscris bazei. Să se aplice la cazul când raza cercului circumscris bazei satisface ecuației:

$$x^2 + 20x - 69 = 0$$

(*Răspuns*: $x = 3$)

10. Un punct *S* se găsește la distanța de 175mm de centrul unui cerc și de 112mm de coarda ce unește punctele de contact ale tangentelor duse din *S* la cerc. Să se găsiască; *1*⁰ raza cercului; *2*⁰ volumul tetraedrului regulat a cărui bază e înscrisă în acest cerc; *3*⁰ unghiul dintre înălțimea și apotema tetraedrului.

(*Răspuns*: $R = 105$ *mm*).

11. O piramidă triunghiulară regulată are aria totală egală cu $1350\sqrt{3}\,cm^2$; apotema piramidei este de 41cm.

Să se găsiască: 1^0 volumul piramidei; 2^0 apotema piramidei exagonale regulate care are acelaş vârf ca piramida triunghiulară şi baza înscrisă în acelaş cerc, o latură a exagonului fiind paralelă cu o latură a triunghiului; 3^0 unghiul între apotemele celor două piramide relativ la laturile paralele ale bazelor.

(*Răspuns*: $L_3 = 18\sqrt{3}$ *cm.* $I = 40$ *cm*).

12. Aria totală a unei piramide exagonale regulate este de $270\sqrt{3}\,cm^2$ şi muchia piramidei, de 21cm. Să se calculeze: 1^0 volumul; 2^0 unghiul dintre înălţimea şi apotema piramidei.

(*Răspuns*: $L = 6$ *cm*; $A = 12\sqrt{3}$ *cm*; $I = 9\sqrt{5}$ *cm*)

13. Aria totală a unei piramide triunghiulare regulate este de $6750\sqrt{3}\,cm^2$; iar triunghiul format de înălţimea, apotema piramidei şi apotema bazei are perimetrul de 150cm. Să se găsiască: 1^0 volumul piramidei; 2^0 unghiul dintre înălţime şi apotemă; 3^0 muchia tetraedrului regulat echivalent cu piramida.

(*Răspuns*: $I = 60cm.$ $a = 25cm.$ $A = 65cm$)

14. Să se afle aria laterală a unei piramide exagonale regulate dacă volumul ei este de $11520\sqrt{3}\,cm^3$; iar muchia şi înălţimea se au între ele ca numerile 17 şi 15. Să se afle mărimea diedrului format de o faţă laterală cu baza.

(*Răspuns*: $l_6 = 16cm.$ $I = 30cm.$ $M = 34cm$)

15. Cele trei muchii OA, OB, OC ale unei piramide triunghulare sunt perpendiculare între ele două câte două şi au lungimile egale cu 40cm. 30cm şi 7cm. Să se calculeze 1^0 volumul piramidei; 2^0 aria bazei; 3^0 înălţimea piramidei; unghiul înălţimei cu înălţimea feţei laterale AOB, care pleacă din acelaş vârf.

(*Răspuns*: 2^0 *aria bazei* $= 625cm$; $I = 6{,}72cm$)

16. Să se afle volumul unei piramide triunghiulare regulate, dacă raza cercului circumscris bazei este de 5cm; iar unghiul dintre înălțime și muchie satisface ecuației:

$$tg^2x\,sec^2x - tg^2x - \frac{3}{cotg^2x} - 4tg^2x + 12 = 0$$

(*Răspuns*: 1^0 $x=60^0$ *vol.*$=93{,}75cm^3$; 2^0 $x=arctg2$)

17. Volumul unui cilindru circular drept este de $50\pi dm^3$ aria laterală este de $20\pi dm^2$. Să se găsiască volumul prismei exagonale înscrise în cilindru.

(*Răspuns*: $R=5$ *dm*; $I=2$ *dm*).

18. Un con circular de revoluție are aria totală de $900\pi dm^2$ și generatoarea de 25dm. Să se găsească: 1^0 volumul conului; 2^0 muchia tetraedrului echivalent.

(*Răspuns*: $R=20dm$; $I=15dm$)

19. Aria totală a unui con este de $450\pi cm^2$; iar generatoarea este astfel că $\frac{3}{4}$ din ea întrece fracțiunea $\frac{7}{20}$ din ea cu 16,4cm. Să se găsească: 1^0 volumul conului; 2^0 unghiul dintre generatoare și înălțime.

(*Răspuns*: $G=41cm$. $R=9cm$.)

20. Aria totală a unui con este de $24\pi dm^2$ și înălțimea de 4dm. Să se afle volumul conului.

21. Aria totală a unui con circular de revoluție este egală cu aria laterală a unui cilindru circular drept cu raza de 21 cm și înălțimea de 77cm. Înălțimea conului este de 56cm. Să se calculeze: 1^0 volumul conului; 2^0 unghiul dintre generatoare și planul bazei.

(*Răspuns*: $R=33cm$. $G=65cm$.).

22. Un con are volumul egal cu $12\pi dm^2$; iar suma dintre aria patratului circumscris cercului de bază și aria dreptunghiului, ce are înălțimea egală cu înălțimea

conului și baza de 4dm, este de $52dm^2$. Să se găsească aria laterală a conului.

(*Răspuns*: 1° $R=3dm\ l=4dm$; 2° $R=2dm\ l=9dm$)

23. Un trunchiu de con, înalt de 12cm, are aria laterală de $169\pi cm^2$ și generatoarea egală cu suma razelor. Să se găsească: 1° volumul trunchiului; 2° unghiul dintre generatoare și înălțime.

(*Răspuns*: $R=9cm\quad r=4cm$).

24. Un trunchiu de con are aria totală egală cu $64\pi dm^2$; Raza mare întrece cu 1dm dublul razei mici; iar generatoarea este de 5dm. Să se găsească volumul trunchiului.

(*Răspuns*: $R=5dm$; $r=2dm$; $l=4dm$)

25. Un trunchiu de con, înalt de 30cm, are generatoarea de 34cm și volumul de $12640\pi cm^3$. Să se găsească: 1° aria laterală a trunchiului; 2° înclinarea generatoarei pe planul bazei mari.

(*Răspuns*: $R=28cm$; $r=12cm$)

26. Aria totală a unui trunchiu de con este egală cu aria laterală a unui cilindru înalt de 23cm, cu raza de 22cm. Raportul dintre înălțimea și generatoarea trunchiului este de $\frac{35}{37}$, iar suma lor este de 72cm. Să se calculeze: 1° volumul trunchiului; 2° înclinarea generatoarei pe planele bazelor.

(*Răspuns*: $r=4cm\quad R=16cm$).

27. Un con circumscris unei sfere are vârful la distanța de 25dm de centrul sferei; aria cercului de intersecție este de $144\pi dm^2$. Să se găsească aria laterală a conului și aria calotei interioare conului.

[*Răspuns*: $r\ con=12dm$; $R=15dm\ G=20dm$ (*sau contrar*)]

28. Se tae o sferă printr'un plan. Perimetrul triunghiului format de distanța planului de centrul sferei,

de raza sferei într'un punct al secțiunii și de raza secțiunii este de 30dm; iar diferența dintre aria calotei mici și aria laterală a conului cu vârful în centrul sferei și cu baza, cercul de secțiune, este egală cu aria unui dreptunghiu cu înălțimea de 2dm și baza egală cu lungimea unui cerc mare al sferei. Să se găsească aria și volumul sferei.

(*Răspuns*: $R=13dm$; $r=12dm.$; $d=5dm$)

29. O sferă este tăiată de un plan. Diferența între dublul ariei laterale a conului, cu vârful în centrul sferei și cu baza, cercul de secțiune, și aria calotei mici este egală cu aria unui dreptunghiu cu baza egală cu lungimea unui cerc mare de pe sferă și cu înălțimea de 4dm; iar aria triunghiului format de distanța centrului de planul de secțiune și de razele sferei și a secțiunii, este de 30dm^2. Să se afle aria și volumul sferei.

(*Răspuns*: $R=12$; $r=12dm$; $d=5dm$)

30. Vârful unui con circumscris unei sfere se găsește la o distanță dată a de centrul sferei; se cunoaște unghiul α dintre generatoarea și înălțimea conului. Să se calculeze: *1°* aria laterală a conului; *3°* aria calotei interioare conului; *3°* raportul acestor arii,; *4°* să se aplice la cazul: $a=13cm$, iar α satisface ecuației:

$$tg^4\alpha - \frac{25}{144}\,tg^2\alpha - sec^2\alpha + sin^2\alpha + \frac{1}{6} = -\frac{1}{144} - cos^2\alpha$$

(*Răspuns*: *4°* $tg\,\alpha = \frac{5}{12}$ $G=12$ $R=5$).

31. Să se găsiască dimensiunile unui dreptunghiu, dacă volumul născut prin rotația dreptunghiului în jurul unei drepte, ce trece prin unul din vârfuri și face cu una din laturi un unghiu α, este egal cu volumul unei sfere de rază R; iar aria dreptunghiului este egală cu a^2.

32. Unul dintre unghiurile ascuțite ale unui triunghiu dreptunghiu are sinusul de $\frac{3}{\sqrt{34}}$; triunghiul se rotește în jurul catetei ce trece prin vârful acestui unghiu, dând naștere la o suprafață a cărei arie totală este de $24\pi dm^2$. Să se găsească volumul corpului mărginit de acea suprafață.

33. Un trapez dreptunghiu în A este echivalent cu un triunghiu dreptunghiu isoscel cu catetele egale cu a; Raportul laturilor neparalele AC, BD este egal cu K. Se prelungește latura AC dincolo de punctul de intersecție al ei cu baza mare, C, cu o distanță egală cu depărtarea de la C la punctul de intersecție al ei cu latura BD până în M. Volumul născut prin rotația triunghiului BDM în jurul lui AC este egal cu jumătate din volumul unei sfere de rază r. Să se afle: 1^0 bazele și înălțimea trapezului; 2^0 aria corpului de rotație: 3^0 înclinarea dreptelor BD, BM, DM pe baze.

34. Un pentagon este format dintr'un dreptunghiu la care este alăturat un triunghiu dreptunghiu, ipotenuza lui coincizând cu lungimea dreptunghiului; aria triunghiului este jumătate din aria unui patrat de latură a; perimetrul dreptunghiului este $2p$. Să se calculeze laturile triunghiului dreptunghiu, dacă volumul corpului născut prin rotația triunghiului în jurul laturii dreptunghiului paralelă cu ipotenuza, este un sfert din volumul unei sfere de rază R. Să se aplice la cazul $p=7m$; $a^2=12m^2$; $\frac{vol.\ sf}{4}=\frac{168\pi}{5}$.

35. Intr'un trapez dreptunghiu, diferența bazelor este de 8cm, iar aria de $240cm^2$. Dacă acest trapez are o mișcare de rotație în jurul laturii perpendiculare pe baze dă naștere unui corp al cărui volum este de $2920\pi cm^2$. Să se calculeze: 1^0 Aria laterală a corpului; 2^0 înclinarea generatoarei pe baze.

36. Să se găsiască aria şi volumul corpului ce ia naştere prin rotaţia unui exagon în jurul uneia din laturile sale.

37. Să se găsiască volumul şi aria corpului generat prin rotaţia unui exagon în jurul unei drepte ce trece printr'un vârf şi face cu una din laturile ce trec prin acelaş vârf un unghiu de 30^0.

38. Se cunoaşte aria corpului născut prin rotaţia unui exagon în jurul uneia din laturile sale. Să se calculeze volumul aceluiaş corp.

39. Un cerc este înscris într'un trapez isoscel. Să se afle volumul trunchiului de con, ce ia naştere prin rotaţia trapezului în jurul diametrului ce uneşte punctele de contact, ştiind că sfera înscrisă are volumul egal cu $288\pi dm^3$, iar aria totală a trunchiului este de $266\pi dm^2$.

(*Răspuns*: $I=12dm.\ G=18dm.\ R=8dm\ r=4dm$).

40. Un cerc este înscris într'un trapez isoscel. Să se afle aria totală a trunchiului de con generat prin rotaţia trapezului în jurul diametrului ce uneşte punctele de contact ale bazelor, ştiind că triplul volumului sferei înscrise este de $32000\pi dm^3$; iar volumul trunchiului de $17080\pi dm^3$.

(*Răspuns*: $I=40dm, G=41dm, R=25dm, r=16dm$).

41. Dintr'un punct S exterior unui cerc O se duce tangenta SM la cerc şi diametrul SAB; se duc tangentele la cerc în punctele A, B, care intersectează pe SM în P, R. Perimetrul patrulaterului $APRB$ este de 1470mm. Se dă întregei figuri o mişcare de rotaţie în jurul diametrului SB; volumul trunchiului de con generat de trapezul $APRB$ este egal cu produsul dintre 28π şi volumul unui cub a cărui muchie în milimetri este egală cu produsul primelor patru numere impare consecutive. Să se găsiască: 1^0 aria sferei generată de

semicercul AMB; 2^0 aria laterală a conului generat de segmentul SM; 3^0 unghiul dintre generatoarea și înălțimea conului.

(*Răspuns*: $Rsf = 210mm$ $rcon = 168mm$. $G = 280mm$).

42. Un segment circular, făcând parte dintr'un cerc de rază R, are o mișcare de rotație în jurul diametrului ce trece prin una din extremitățile arcului, dând naștere unui corp cu aria totală egală cu aria unui cerc de rază a. Diferența între aria calotei și aria laterală a conului este egală cu aria unui cerc de rază b. Să se calculeze: 1^0 lungimea coardei; 2^0 lungimea arcului subîntins de coardă.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

19.4

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

TABLA DE MATERII

PROBLEME	rezolvate		de rezolvat	
	No.	Pag.	No.	Pag.
CLASA I.				
Aritmetică. Cele patru operaţiuni	1	3	1—12	4
Arii de figuri plane, transformări de unităţi metrice			13—20	5
Arii şi volume de corpuri.			21—30	
CLASA A II-a.				
ARITMETICĂ				
Numere prime			1	18
Descompuneri în factori primi			2	18
Împărţiri exacte			3	18
Cel mai mare divizor comun ; cel mai mic multiplu comun			4—6	18
Simplificarea fracţiilor			7—8	19
Compararea fracţiilor			9—10	19
Adunarea „			11	19
Scăderea fracţiilor ordinare			12	20
Adunări şi scăderi de fracţii ordinare . .			13	20
Imulţirea fracţiilor ordinare			14—15	20
Adunare, scădere, înmulţire			16	21
Împărţirea fracţiilor ordinare.			17	21
Cele patru operaţii cu fracţii ordinare . .			18—19	21
Adunare, scădere, valorificarea întregului cunoscându-se o fracţie din el	1	9	20—29	22
Cele patru operaţii, valorificarea întregului cunoscându-se o fracţie din el	2	10	30—36	26
Operaţii, valorificarea unei fracţii din alta.	3—4	13	33—40	27

PROBLEME	rezolvate		de rezolvat	
	No.	Pag.	No.	Pag.
GEOMETRIE				
Triunghiu isoscel (Egalitatea triunghiurilor)			1—9	33
Triunghiu echilateral (Egalitat. triunghiur.)	1—2	30	10—11	34
Triunghiu oarecare „ „			12—14	34
Patrat „ „			15, 16, 20	34
Dreptunghiu „ „			17	35
Exagon regulat „ „			18, 19	35
Unghiuri înscrise			21	35
CLASA A III-a.				
ARITMETICĂ				
Rădăcină patrată			1—4	40
Al patrulea proporţional			5	40
Medie proporţională			6	40
Impărţire în părţi proporţionale			7—10	40
Regulă de trei simplă			11—20	40
Regulă de trei compusă			21—23	41
Fracţii ordinare, rădăcină patrată . . .			24	42
Regulă de atât la sută, de dobândă . . .			25—26	42
Fracţii, rapoarte, proporţii, rădăc. patrată .	1	36	27—34	42
Proporţii, împărţire în părţi proporţionale, regulă de trei	2	37		
GEOMETRIE				
Teorema lui Thales, segmente proporţionale, asemănarea triunghiurilor	1	45	1—17	52
Segmente proporţionale în cerc.			18—21	57
Teorema lui Pythagora			22—27	58
Teorema lui Pythagora, asemănare			28—33	58
Relaţii metrice			34—35	59
Laturi, arii de poligoane regulate . . .			36—38	59
Teorema lui Pythagora, apoteme, arii de poligoane regulate			39—55	60
Teorema lui Pythagora, poligoane regulate înscrise, arce, sectoare, segmente circulare	2	18	56—63	

PROBLEME	rezolvate		de rezolvat	
	No.	Pag.	No.	Pag.
CLASA A IV-a.				
ALGEBRĂ				
Operaţii cu expresiuni algebrice. . . .			1, 2	88
Descompunere în factori a expresiunilor algebrice			3	88
Simplificare de fracţii algebrice . . .			4	89
Adunare, scădere, valori numerice de fracţii.			5—7	89
Impărţire, înmulţire, cu fracţii algebrice. .			8—9	91
Ecuaţii de gradul I cu o necunoscută . . .	1	65	10	91
Sisteme de gradul I cu două necunoscute	2—4	68	11—14	93
Sisteme de gradul I cu trei necunoscute			15—17	95
Probleme de gr. I (fracţii din diferiţi întregi)	5	73	18—19	96
Probleme de gr. I (Valorificarea fracţiilor din fracţii)	6	75	20—25	97
Probleme de gr. I (fracţii, dobândă) . . .	7	83	28—32	100
GEOMETRIE PLANĂ ŞI ALGEBRĂ				
Triunghiu dreptunghiu, poligoane regulate .	1	103	1—12	124
Arc, sector, segment circular			13—15	127
GEOMETRIE IN SPAŢIU ŞI ALGEBRĂ				
Paralelipiped dreptunghiu			1—5	128
Prisme regulate, triunghiulare şi exagonale, paralelipipede.	3	112	6—14	129
Tetraedru regulat, paralelipiped	2	106	15—23	132
Piramide regulate, triunghiulare şi exagonale	4	115	24—41	133
Piramide, paralelipiped			42—43	136
Cilindru			44	137
Cilindru, paralelipiped, prismă			45—47	137
Con, piramidă	5	118	48	138
Con, paralelipiped			49	138
Con, tetraedru regulat, piramidă			50—65	138
Trunchiu de con			66, 67	141
Sferă, con	6	121	68—71	142

PROBLEME	rezolvate		de rezolvat	
	No.	Pag.	No.	Pag.
CLASA A V-a.				
ALGEBRĂ				
Impărţirea polinoamelor			1	174
Fracţii nedeterminate			2	175
Radicali	2	147	3	176
Nedeterminări, radicali	1	143	4	176
Ecuaţii de gr. I, radicali, nedeterminări	3	149	5—8	176
Sisteme de gr. I			9—10	178
Probleme de gr. I			11—12	179
Neegalităţi de gr. I			13	180
Ecuaţii de gradul al II-lea			14	180
Ecuaţii de gr. II, nedeterminări, radicali	4	151	15—18	180
Ecuaţii de gr. II cu coeficienţi depinzând de un parametru			19	181
Descompunerea trinomului în factori, semnul trinomului, discuţia rădăcinilor ec. de gr. II	7—8	161	20—25	182
Neegalităţi de gr. II, semnul trinomului	5	153	26	183
Ecuaţii reciproce	6	157	27	183
Ecuaţii reciproce, discuţia rădăcinelor ec. de gr. II.	9	166	28—35	184
Ecuaţii reciproce, relaţii între rădăcini şi coeficienţi în ec. de gr. II			36	185
Sisteme de gradul al II-lea	10	169	37—41	186
Probleme de gr. II			42—43	187
Reprezentarea grafică a polinomului de gradul I în două variabile: construcţie de drepte			44—46	187
Cerc, parabolă, elipsă, hiperbolă, dreaptă			47—54	188
Ecuaţii, reprezentări grafice a rădăcinelor	11	171	55—58	190
GEOMETRIE				
Triunghiu dreptunghiu			1	202
Triunghiuri echilaterale, exagoane regulate			2—4	202
Trapez			5—6	202

PROBLEME	rezolvate		de rezolvat	
	No.	Pag.	No.	Pag.
Pătrat, triunghiu dreptunghiu, triunghiu echilateral			7—8	203
Exagon regulat, dreptunghiu, triunghiu echilateral			9—11	203
Dreptunghiu	1	192	12—13	204
Triunghiu dreptunghiu, dreptunghiu, patrat	2	195	14—20	204
CLASA A VI-a				
TRIGONOMETRIE				
Variaţia liniilor trigonometrice, logaritmi de de numere			1—4	216
Ecuaţii trigonometrice (fără logaritmi)	1	207	5	217
Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice			6—19	219
Ecuaţii trigonometrice (linii trigonometrice diferite ale aceluiaş arc, logaritmi de linii trigonometrice(	2	210	20	221
Teorema sumei, formule calculabile prin logaritmi			21—24	222
Ecuaţii trigonometrice (linii trigonometrice diferite de arce diferite, funcţiuni de un arc; teorema sumei)	3	213	25, 29	223
Rezolviri de triunghiuri dreptunghice, ecuaţii			26—27	224
Rezolviri de triunghiuri oarecare			30—39	225
Problema ce conduc la rezolviri de triunghiuri (calcul de segmente)			40—44	226
GEOMETRIE IN SPAŢIU.				
Paralelipiped dreptunghiu	1	228	1—6	247
Prisme regulate : triunghiulare şi exagonale.			7—8	248
Tetraedru regulat			9—10	248
Piramide regulate : triunghiulare, exagonale	2	233	11—16	248
Cilindru			17	250
Con	3	238	18—22	250
Trunchiu de con	4	241	23—26	251
Sferă, calotă sferică			27—30	251
Volume generate prin rotaţie de figuri	5	243	31—42	252

9961

NUMĂRUL PROBLEMELOR CONȚINUTE

Clasa	RAMURA	Rezolvate	Nerezolvate	Total
I	Aritmetică	1	30	31
II	Aritmetică	4	40	44
II	Geometrie.	2	21	23
III	Aritmetică	2	34	36
III	Geometrie.	2	63	65
IV	Algebră	7	32	39
IV	Geometrie plană	1	15	16
IV	Geometrie în spațiu	5	71	76
V	Algebră	11	58	69
V	Geometrie plană	2	20	22
VI	Trigonometrie	3	44	47
VI	Geometrie în spațiu	5	42	47
		45	470	515

BIBLIOTECA UNIVERSITĂȚII - IAȘI - 1957

7*8 = 2

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY